## Лекция 2. Потенциал электростатического поля.

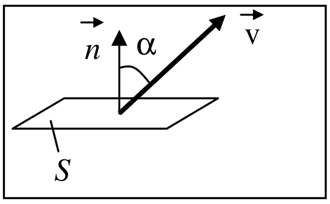
*Работа электростатического поля при перемещении зарядов. Циркуляция вектора напряжённости. Связь напряжённости и потенциала.*

### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОТСТУПЛЕНИЕ

Будем предполагать, что в некоторой области пространства задано непрерывно-дифференцируемое векторное поле $\vec{v}\left(x,y,z\right)$.

1) Поток векторного поля через поверхность.

Потоком вектора $\vec{v}$ через некоторую поверхность называется величина $\Phi_v=\iint\limits_S\left(\vec{v},d\vec{S}\right)$.




В простейшем случае плоской поверхности S и постоянного векторного поля поток определяется как

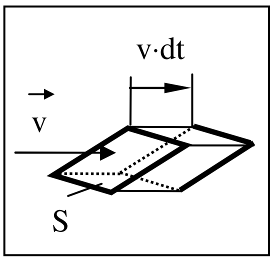
$$\Phi_v=v\cdot S\cos\alpha,$$

где $\alpha$ - угол между вектором $\vec{v}$ и нормалью $\vec{n}$ к площадке *S*.

Если поверхность *S* не является плоской, то она разбивается на элементарные участки величиной *dS*, для каждого из которых ищется соответствующая величина $\delta\Phi_v=v\cdot dS\cos\alpha$, а затем производится суммирование по всей поверхности $\Phi_v=\sum\limits_S\delta\Phi_v$.

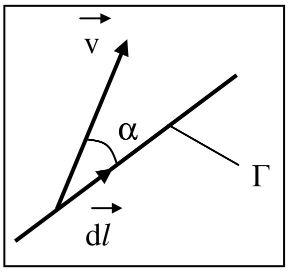
Если ввести вектор, перпендикулярный к каждой площадке: $d\vec{S}=\vec{n}\cdot dS$, где $\vec{n}$ - единичная нормаль к площадке *dS*, то величину потока записать можно в виде $\delta\Phi_v=v\cdot dS\cos\alpha=\left(\vec{v},d\vec{S}\right)$.

Тогда общий поток $\Phi_v=\sum\limits_S\delta\Phi_v=\iint\limits_S\left(\vec{v},d\vec{S}\right)$.




**Пример**. Найдем объем жидкости протекающей через некоторую малую наклонную площадку за единицу времени.

Если скорость жидкости равна v и в пределах площадки её можно считать постоянной, то объём жидкости, пошедший через площадку за малый промежуток времени *dt* заполнит внутренность косого параллелепипеда, объём которого равен $S\cos\alpha\cdot vdt$. Здесь $\alpha$ - угол отклонения площадки от направления, перпендикулярного вектору скорости жидкости $\vec{v}$ - т.е. угол между вектором единичной нормали к площадке и вектором скорости жидкости. Если ввести вектор $\vec{S}=S\cdot\vec{n}$, объёмный расход жидкости, т.е. объём жидкости, протекающей через площадку в единицу времени, определяется соотношением $Q=vS\cos\alpha=\left(\vec{v},\vec{S}\right)$.♣




2) Интеграл от векторного поля вдоль кривой линии Г: $\int_\Gamma (\vec{v}, d\vec{l})$, где $d\vec{l}$ - касательный вектор к каждой точке кривой. Таким образом, кривая является ориентированной – она имеет начальную и конечную точки (так как задано направление вдоль кривой с помощью вектора $d\vec{l}$ ).

В случае если векторное поле постоянное, а кривая – отрезок прямой линии длиной L, интеграл равен

$$\int_\Gamma (\vec{v}, d\vec{l}) = v \cdot L\cos\alpha$$

где $\alpha$ - угол между векторами поля и касательным вектором.

В случае если кривая линия не является прямой и векторное поле не постоянное, нужно разбить линию на малые участки длиной *dl* и затем просуммировать все выражения

$$\sum_{Кривая} v \cdot dl\cos\alpha = \int_\Gamma (\vec{v}, d\vec{l}).$$

Интеграл от векторного поля $\vec{v}$ по замкнутой кривой Г: $\oint_\Gamma (\vec{v}, d\vec{l})$ называется *циркуляцией* этого векторного поля.

3) Теорема Стокса.

Если рассмотреть незамкнутую поверхность S, то край этой поверхности будет являться замкнутой кривой. Будем считать, что поверхность является ориентируемой (т.е. она – двусторонняя). (Односторонней поверхностью является, например, лента Мёбиуса – поэтому она не ориентируемая).

Если Г – кривая, являющаяся краем поверхности S, то можно рассмотреть циркуляцию векторного поля вдоль края Г: $\oint_\Gamma (\vec{v}, d\vec{l})$.

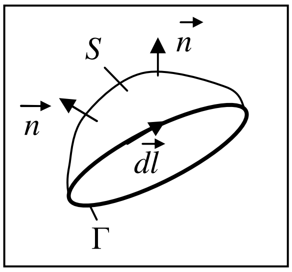
Векторному полю $\vec{v}$ можно сопоставить ещё одно векторное поле $rot(\vec{v})$, которое называется *ротором* векторного поля $\vec{v}$. Оно определяется правилом

$$rot(\vec{v}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + \vec{e}_y\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) + \vec{e}_z\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

где $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ - орты декартовой системы координат.

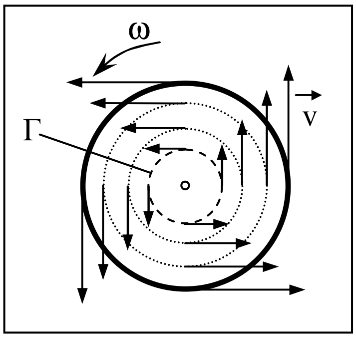
Теорема Стокса гласит:

$$\oint_\Gamma (\vec{v}, d\vec{l}) = \iint_S (rot(\vec{v}), d\vec{S}).$$




*Циркуляция векторного поля вдоль края ориентируемой поверхности равна потоку ротора этого поля через эту поверхность*. Направление касательного вектора $d\vec{l}$ к краю Г выбирается так чтобы поверхность оставалась слева при обходе, а нормаль направлена наружу (правый винт).

Смысл ротора можно прояснить следующим образом. Рассмотрим диск, вращающийся вокруг оси симметрии с угловой скоростью ω. Скорость любой точки определяется расстоянием до оси вращения $v = R \cdot \omega$. Вектор скорости любой точки направлен по касательной к её траектории – окружности с центром на оси вращения. Можно сказать, что на диске задано векторное поле – поле векторов скоростей всех точек $\vec{v}$. Найдем ротор этого поля $rot(\vec{v})$. Воспользуемся теоремой Стокса




$$\oint_\Gamma \left(\vec{v}, d\vec{l}\right) = \iint_S \left(rot(\vec{v}), d\vec{S}\right).$$

Если взять малую площадку *S*, то по теореме о среднем для интеграла можно приближенно записать $\oint_\Gamma \left(\vec{v}, d\vec{l}\right) \approx \left(rot(\vec{v})\right)_n \cdot S$, где $\left(rot(\vec{v})\right)_n$ - проекция ротора на нормаль к площадке *S*.

В качестве кривой Г возьмём окружность малого радиуса R с центром на оси вращения. Длина этой окружности $2\pi R$, она охватывает площадку S, площадь которой $\pi R^2$.
В каждой точке этой окружности вектор скорости направлен по касательной к ней, поэтому угол между малым касательным вектором $d\vec{l}$ и вектором скорости $\vec{v}$ равен нулю. Следовательно

$$\left(\vec{v}, d\vec{l}\right) = v \cdot dl$$

На выбранной окружности Г величина скорости не меняется $v = R \cdot \omega = const$. Тогда

$$\oint_\Gamma \left(\vec{v}, d\vec{l}\right) = \oint_\Gamma v \cdot dl = \omega R \oint_\Gamma dl.$$

Интеграл $\oint_\Gamma dl = 2\pi R$ равен длине окружности Г, поэтому циркуляция $\oint_\Gamma v \cdot dl = 2\pi\omega R^2$.

Откуда

$$2\pi\omega R^2 \approx \left(rot(\vec{v})\right)_n \pi R^2$$

После сокращений устремим радиус окружности R к нулю, и получим проекцию ротора на ось вращения

$$\left(rot(\vec{v})\right)_n = 2\omega.$$

Т.е. ротор равен удвоенной угловой скорости вращения векторного поля. Поэтому иногда ротор также называют *вихрем* поля. Поля, для которых ротор отличен от нуля называют *вихревыми* или *соленоидальными*. Оказывается, для любого вихревого поля $\vec{v}$ существует некоторое векторное поле $\vec{a}$, такое, что выполняется равенство $\vec{v} = rot\left(\vec{a}\right)$.

4) Векторное поле $\vec{v}$, для которого существует функция непрерывно-дифференцируемая Ф, такая, что выполняется равенство

$$\vec{v} = grad\Phi$$

называется *потенциальным*.

Ротор потенциального поля равен нулевому вектору $rot\left(grad\Phi\right) = \vec{0}$.

Действительно, т.к. $grad\Phi = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)$, то

$$rot\left(\vec{v}\right) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial x} & \frac{\partial\Phi}{\partial y} & \frac{\partial\Phi}{\partial z} \end{vmatrix} = \vec{e}_x\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial y}\right) + \vec{e}_y\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z}\right) + \vec{e}_z\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x}\right) = \vec{0}.$$

5) Теорема Остроградского-Гаусса.

Любому векторному полю $\vec{v}$ соответствует функция, называемая *дивергенцией* этого векторного поля

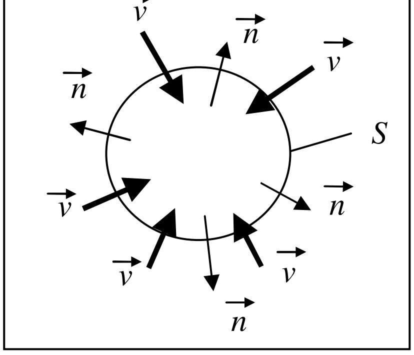
$$div\left(\vec{v}\right) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Теорема Остроградского-Гаусса гласит

*поток векторного поля через замкнутую поверхность, ориентированную наружу, равен интегралу от дивергенции этого поля по объёму, охваченному этой поверхностью*

$$\oint\!\!\!\oint_S \left(\vec{v}, d\vec{S}\right) = \iiint_V div\left(\vec{v}\right) dV$$

Смысл дивергенции




Рассмотрим выпуклую поверхность, охватывающую достаточно малый объём. Тогда по теореме о среднем для интеграла

$$\oint\!\!\!\oint_S \left(\vec{v}, d\vec{S}\right) = \iiint_V div\left(\vec{v}\right) dV \approx div\left(\vec{v}\right)\cdot V$$

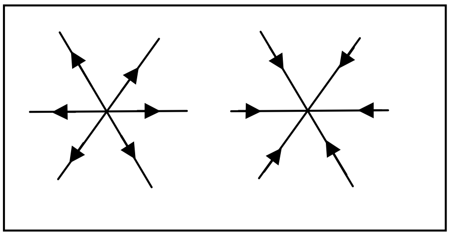
Предположим, что векторное поле втекает внутрь объёма V, т.е. в каждой точке поверхности S векторы $\vec{v}$ направлены против векторов нормалей $\vec{n}$. Поэтому в каждой точке скалярное произведение $(\vec{v}, d\vec{S}) = (\vec{v}, \vec{n})dS < 0$ отрицательно.

Тогда интеграл $\oiint\limits_S (\vec{v}, d\vec{S}) < 0$. Так как величина объёма V>0, то

$$div(\vec{v}) \approx \frac{\oiint\limits_S (\vec{v}, d\vec{S})}{V} < 0$$

Говорят, что в этом случае поле имеет внутри поверхности S «сток» - «оно как бы стекает в некоторую дырку».

Если же $div(\vec{v}) > 0$, то говорят, что у поля есть «источник».



Можно заметить, что в случае *стока* или *источника* поля, при стягивании поверхности S в точку, векторное поле становится похожим на картину силовых точечных зарядов.
В этом случае положительные заряды являются *источниками* электрического поля и для них $div\vec{E} > 0$.

Отрицательные заряды являются *стоками* электрического поля. Для них $div\vec{E} < 0$.

Электрические заряды принято называть просто *источниками* (положительными и отрицательными) электрического поля.

Таким образом, силовые линии электрического поля не являются непрерывными линиями – они имеют начало и конец.

*Вихревое* электрическое поле $\vec{v}$ не имеет источников. Действительно, в этом случае существует некоторое поле $\vec{a}$, такое, что $\vec{v} = rot(\vec{a})$, поэтому

$$div(\vec{v}) = div(rot(\vec{a})) = \frac{\partial(rot(\vec{a}))_x}{\partial x} + \frac{\partial(rot(\vec{a}))_y}{\partial y} + \frac{\partial(rot(\vec{a}))_z}{\partial z}$$

Но

$$rot(\vec{a}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \vec{e}_y\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \vec{e}_z\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)$$

поэтому

$$div(\vec{v}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) =$$
$$= \frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 a_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial z \partial y} = 0$$

Так как вихревое поле не имеет источников, то его силовые линии нигде не разрываются, т.е. они непрерывные и замкнутые.

## ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Работа, совершаемая силами поля, при относительном изменении положения двух зарядов равна:

$$A = W_{ПОТ\_НАЧ} - W_{ПОТ\_КОН} = k\frac{q_1 \cdot q_2}{R_{НАЧ}} - k\frac{q_1 \cdot q_2}{R_{КОН}}.$$

Пусть теперь один заряд $q_1$=Q закреплен неподвижно, так что перемещаться будет второй заряд $q_2$=q, поэтому выражение для работы примет вид

$$A = W_{ПОТ\_НАЧ} - W_{ПОТ\_КОН} = k\frac{qQ}{R_{НАЧ}} - k\frac{qQ}{R_{КОН}} = q\left(k\frac{Q}{R_{НАЧ}} - k\frac{Q}{R_{КОН}}\right).$$

Энергетическая характеристика электрического поля – отношение энергии взаимодействия точечного заряда с полем W к величине этого заряда q называется **потенциалом поля** в данной точке

$$\varphi = \frac{W}{q}.$$

Единица измерения потенциала Вольт (В). 1 В =1 Дж/ 1 Кл.

Таким образом, если поле создается точечным зарядом Q, то на расстоянии R от него потенциал определяется по формуле (C=0)

$$\varphi = \frac{W}{q} = k\frac{Q}{R}.$$

Тогда, с учетом определения потенциала работу сил поля по перемещению заряда q можно записать в виде

$$A = q\left(\varphi_{НАЧ} - \varphi_{КОН}\right).$$

Т.е. *разность потенциалов между двумя точками поля – это отношение работы сил поля (кулоновских сил) по переносу заряда между этими точками к величине этого заряда*

$$\varphi_{НАЧ} - \varphi_{КОН} = \frac{A_{КУЛ}}{q}.$$

В частности, если заряд q удаляется от заряда Q на очень большое расстояние ($R_{КОН}=\infty$), то

$$A = k\frac{qQ}{R_{НАЧ}} = q\varphi_{НАЧ},$$

где $\varphi_{\text{НАЧ}} = k\dfrac{Q}{R_{\text{НАЧ}}}$. Тогда потенциал данной точки поля можно определить как **отношение работы сил поля по перемещению заряда q на очень большое расстояние из данной точки к величине этого заряда**.

Поверхности в пространстве, на которых потенциал остается постоянным называются *эквипотенциальными поверхностями*.

Силовые линии направлены перпендикулярно эквипотенциальным поверхностям в каждой их точке.

## СВЯЗЬ НАПРЯЖЕННОСТИ И ПОТЕНЦИАЛА.

Так как энергия взаимодействия точечного заряда с электрическим полем и сила, действующая на этот заряд со стороны поля, связаны соотношением $\vec{F} = -grad\left(\text{W}_{\text{ПОТ}}\right)$, то из определений получаем $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q} = -\dfrac{1}{q}grad\left(\text{W}_{\text{ПОТ}}\right) = -grad\left(\dfrac{\text{W}_{\text{ПОТ}}}{q}\right) = -grad\left(\varphi\right)$.

Таким образом, связь между напряженностью и потенциалом электростатического поля дается выражением (в дифференциальной форме)

$$\vec{E} = -grad\left(\varphi\right).$$

Следовательно, электростатическое поле является потенциальным полем.

Из свойств градиента следует, что вектор напряжённости электрического поля направлен в сторону наибольшего убывания потенциала, перпендикулярно эквипотенциальной поверхности.

Работа сил электрического поля

$$A_{КУЛ} = \int\limits_{НАЧ}^{КОНЕЦ}\left(\vec{F}_{КУЛ}, d\vec{l}\right) = \int\limits_{НАЧ}^{КОНЕЦ}\left(q\cdot\vec{E}, d\vec{l}\right) = q\cdot\int\limits_{НАЧ}^{КОНЕЦ}\left(\vec{E}, d\vec{l}\right)$$

В то же время $A_{КУЛ} = q\left(\varphi_{\text{НАЧ}} - \varphi_{\text{КОН}}\right)$.

Сравниваем эти выражения и получаем

$$\varphi_{\text{НАЧ}} - \varphi_{\text{КОН}} = \int\limits_{НАЧ}^{КОНЕЦ}\left(\vec{E}, d\vec{l}\right)$$

Если обозначить изменение потенциала как $\Delta\varphi = \varphi_{\text{КОН}} - \varphi_{\text{НАЧ}}$ (НЕ ПУТАЙТЕ С ОПЕРАТОРОМ ЛАПЛАСА!), то получим связь напряженности и потенциала в интегральной форме

$$\Delta\varphi = -\int\limits_{НАЧ}^{КОНЕЦ}\left(\vec{E}, d\vec{l}\right)$$

Из этого выражения следует ТЕОРЕМА О ЦИРКУЛЯЦИИ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ Для любой замкнутой траектории (любой кривой линии) Г находящейся в области пространства, где создано электростатическое поле значение интеграла

$$\oint_{\Gamma}\left(\vec{E},d\vec{l}\right)=0.$$

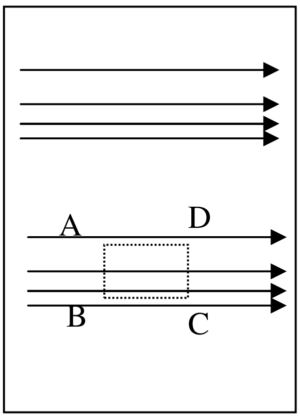
вдоль этой замкнутой линии Г всегда равно нулю.

Действительно, в случае, когда точечный заряд перемещается вдоль какой-то замкнутой траектории Г, выполняется равенство $\varphi_{\text{КОН}}=\varphi_{\text{НАЧ}}$, поэтому

$$\oint_{\Gamma}\left(\vec{E},d\vec{l}\right)=\int_{НАЧ}^{КОНЕЦ}\left(\vec{E},d\vec{l}\right)=-\Delta\varphi=\varphi_{\text{НАЧ}}-\varphi_{\text{КОН}}=0.$$

Из теоремы Стокса следует дифференциальная форма теоремы о циркуляции:
т.к. электростатическое поле потенциальное, то его ротор равен нулевому вектору в каждой точке:

$$rot\vec{E}=\vec{0}.$$




**Пример**. *Можно ли создать неоднородное электростатическое поле, силовые линии которого параллельны друг другу?*

В электростатическом поле выполняется равенство $\oint_{\Gamma}\left(\vec{E},d\vec{l}\right)=0$ для любого замкнутого контура Г. Если возьмём в качестве контура Г прямоугольник ABCD, то интеграл можно разбить на 4 интеграла вдоль сторон этого прямоугольника:

$$\oint_{\Gamma}\left(\vec{E},d\vec{l}\right)=\int_{AB}\left(\vec{E},d\vec{l}\right)+\int_{BC}\left(\vec{E},d\vec{l}\right)+\int_{CD}\left(\vec{E},d\vec{l}\right)+\int_{DA}\left(\vec{E},d\vec{l}\right).$$

Но на сторонах AB и CD векторы $\vec{E}$ и $d\vec{l}$ перпендикулярны друг другу, т.е. $\left(\vec{E},d\vec{l}\right)=0$, поэтому $\int_{AB}\left(\vec{E},d\vec{l}\right)=0$ и $\int_{CD}\left(\vec{E},d\vec{l}\right)=0$.

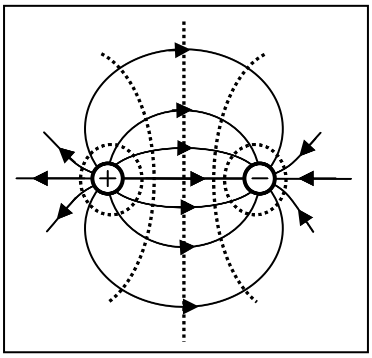
На стороне BC векторы $\vec{E}$ и $d\vec{l}$ направлены одинаково, на стороне DA направлены противоположно, откуда

$$\oint_{\Gamma}\left(\vec{E},d\vec{l}\right)=\int_{BC}\left(\vec{E},d\vec{l}\right)+\int_{DA}\left(\vec{E},d\vec{l}\right)=\int_{BC}E\cdot\left(cos\,0^0\right)\cdot dl+\int_{DA}E\cdot\left(cos180^0\right)\cdot dl=\int_{BC}Edl-\int_{DA}Edl$$

Вблизи стороны BC силовые линии расположены гуще, чем вблизи стороны DA, поэтому $E_{BC}>E_{DA}$, следовательно

$$\oint_{\Gamma}\left(\vec{E},d\vec{l}\right)=\int_{BC}Edl-\int_{DA}Edl=E_{BC}\cdot\left|BC\right|-E_{DA}\cdot\left|DA\right|\neq 0.$$

То есть для такого поля не выполняется теорема о циркуляции.♣



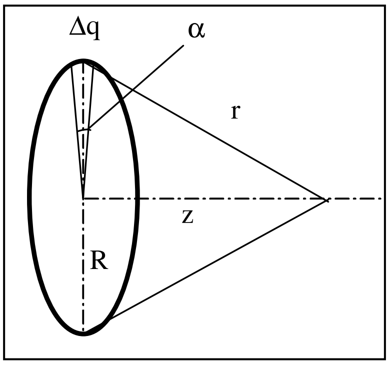
Из принципа суперпозиции следует

$$\vec{E}_{\Sigma} = \sum_i \vec{E}_i = \sum_i grad\left(\varphi_i\right) = grad\left(\sum_i \varphi_i\right) = grad\left(\varphi_{\Sigma}\right),$$

$$\text{т.е. } \varphi_{\Sigma} = \sum_i \varphi_i .$$

*Потенциал в данной точке поля, создаваемого системой зарядов равен алгебраической сумме потенциалов поля, создаваемых каждым из зарядов в отдельности.*

**Пример**. *Рассмотрим электрическое поле, создаваемое заряженным кольцом, радиус которого* R. *Найдем потенциал на оси кольца на расстоянии* z *от плоскости кольца.*




*Решение*. Разобьем кольцо на большое количество участков, опирающихся на центральный угол $\alpha = \frac{2\pi}{N}$. (Длина одного участка $L = \frac{2\pi R}{N}$.) Заряд одного участка $q = \frac{Q}{N}$, где Q – заряд кольца. Будем считать, что Q>0. Принимая малый участок кольца за точечный заряд можно найти потенциал поля на оси кольца, создаваемого одним участком: $\varphi_{\alpha} = k\frac{q}{r}$, где $r = \sqrt{R^2 + z^2}$. Тогда, в соответствии с принципом суперпозиции, суммарный потенциал

$$\varphi = \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha} = \sum_{\alpha} k\frac{q}{r} = \sum_{\alpha} k\frac{Q/N}{r} = Nk\frac{Q/N}{r} = k\frac{Q}{\sqrt{R^2 + z^2}}.$$

Из этой формулы видно, что потенциал в центре кольца (z=0) равен $\varphi = k\frac{Q}{R}$.♣

Энергия системы зарядов равна сумме энергий попарных взаимодействий

$$W_{\Sigma} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} W_{ij}$$

Здесь множитель $\frac{1}{2}$ учитывает, что одна и та же пара индексов встречается в этом выражении два раза - один раз как *ij*, а второй раз как *ji*.

Запишем это выражение через потенциалы

$$W_{\Sigma} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} W_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} q_i \varphi_j = \frac{1}{2}\sum_i q_i \left(\sum_{j \neq i} \varphi_j\right).$$

Последнее выражение включает в себя сумму потенциалов полей $\sum_{j\neq i}\varphi_j$ , создаваемых всеми зарядами, за исключением номера $i$, в том месте, где находится заряд с номером $i$.

Пример. Найдем энергию взаимодействия двух точечных зарядов $q_1$ и $q_2$.

В точке, где находится заряд $q_1$, второй заряд создаёт потенциал $\varphi_2 = k\dfrac{q_2}{R}$. В точке, где находится заряд $q_2$, первый заряд создаёт потенциал $\varphi_1 = k\dfrac{q_1}{R}$. Тогда

$$W = \frac{1}{2}\left(q_1\varphi_2 + q_2\varphi_1\right) = \frac{1}{2}\left(q_1 k\frac{q_2}{R} + q_2 k\frac{q_1}{R}\right) = k\frac{q_1 q_2}{R}.\clubsuit$$

Очень часто распределение заряды в пространстве можно задать с помощью функции, называемой плотностью распределения.

1) Объёмная плотность распределения $\rho(x,y,z)$ (Единицы измерения Кл/м$^3$). Тогда суммарный заряд объема $Q = \iiint\limits_V \rho dV$ . Энергию взаимодействия некоторого точечного заряда q с заряженным телом можно определить следующим образом $W = q\iiint\limits_V \frac{\rho}{r}dV$ , где $r$ – расстояние от точечного заряда до точки, где задана плотность $\rho(x,y,z)$.
2) Поверхностная плотность распределения заряда $\sigma(x,y,z)$ (Единицы измерения Кл/м$^2$). Тогда суммарный заряд поверхности $Q = \iint\limits_S \sigma dS$ . Энергия взаимодействия некоторого точечного заряда q с заряженной поверхностью $W = q\iint\limits_S \frac{\sigma}{r}dS$ где $r$ – расстояние от точечного заряда до точки, где задана плотность $\sigma(x,y,z)$.
3) Линейная плотность распределения заряда $\lambda(x,y,z)$ (Единицы измерения Кл/м). Тогда суммарный заряд кривой линии $Q = \int\limits_\Gamma \lambda dl$ . Энергия взаимодействия некоторого точечного заряда q с заряженной линией $W = q\int\limits_\Gamma \frac{\lambda}{r}dl$ где $r$ – расстояние от точечного заряда до точки, где задана плотность $\lambda(x,y,z)$.