

Лекции 18-19. Электромагнитная природа света. Интерференция света.

Шкала электромагнитных излучений. Оптическое излучение, его интенсивность. Отражение и преломление плоской волны на границе двух диэлектриков. Интерференция электромагнитных волн. Расчёт интерференционной картины с двумя источниками. Пространственно-временная когерентность.

Физическая оптика – раздел физики, изучающий свойства и физическую природу света, а также его взаимодействие с веществом. По своей природе свет является электромагнитным излучением. Поэтому для описания световых явлений справедливы все положения электродинамики.

Электромагнитный спектр принято делить на радиоволны, инфракрасное, видимое, ультрафиолетовое, рентгеновское и гамма-излучение. Между ними нет резких переходов. Участки перекрываются, а границы между ними условны.

К радиоволнам относят излучение с длиной волны больше 0,1 мм.

При этом их подразделяют на:

сверхдлинные радиоволны, для которых длина волны больше 10 км;

длинные волны $1 \text{ км} \leq \lambda \leq 10 \text{ км}$;

средние волны $100 \text{ м} \leq \lambda \leq 1 \text{ км}$;

короткие волны $10 \text{ м} \leq \lambda \leq 100 \text{ м}$;

ультракороткие волны $\lambda \leq 10 \text{ м}$.

Ультракороткие волны, в свою очередь подразделяют на метровые, дециметровые, миллиметровые и субмиллиметровые.

Волны с длиной менее 1 м принято называть волнами *сверхвысоких частот*. (соответственно, частоты таких волн более $3 \cdot 10^8$ Гц.)

К *оптическому диапазону* относят волны в диапазоне $10 \text{ нм} \leq \lambda \leq 2 \text{ мм}$.

Он включает:

инфракрасное излучение $760 \text{ нм} \leq \lambda \leq 2 \text{ мм}$;

видимый свет $400 \text{ нм} \leq \lambda \leq 760 \text{ нм}$;

ультрафиолет $10 \text{ нм} \leq \lambda \leq 400 \text{ нм}$.

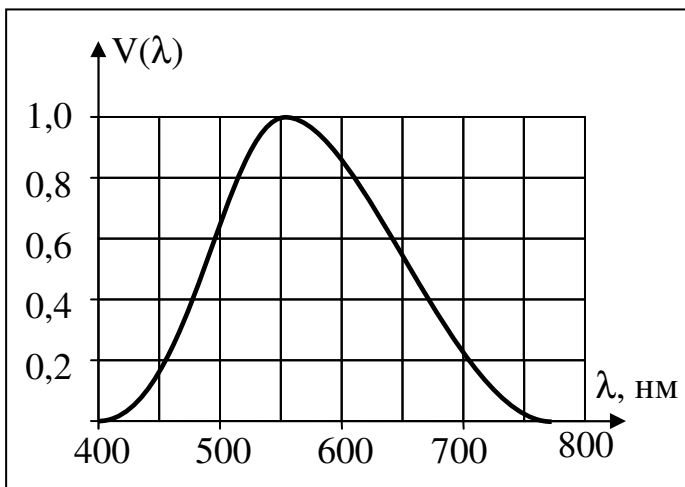
Естественный белый свет включает волны с длинами всего видимого диапазона.

В силу биологических особенностей, человеческий глаз реагирует практически только на величину напряжённости E электрического поля электромагнитной волны. Поэтому в оптике в основном рассматривают вектор напряжённости электрического поля \vec{E} и называют его *световой вектор*.

Характеристики излучения.

Световой поток.

Пусть $d\Phi_{\text{э}}$ – поток энергии, приходящийся на интервал длин волн от λ до $\lambda+d\lambda$, тогда величина $\varphi(\lambda) = \frac{d\Phi_{\text{э}}}{d\lambda}$ называется функцией распределения потока энергии по длинам волн. С помощью функции распределения можно найти поток энергии в интервале от λ_1 до λ_2 : $\Phi_{\text{э}} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \varphi(\lambda) d\lambda$.



Относительная спектральная чувствительность $V(\lambda)$ определяет чувствительность нормального человеческого глаза к излучению разной длины волны (дневное зрение).

Максимальное значение $V(\lambda_0)=1$ приходится на длину волны $\lambda_0 \approx 555$ нм (желто-зелёный цвет). Вне интер-

вала

(400 нм; 760 нм) $V(\lambda)=0$.

Значения функции $V(\lambda)$ обратно пропорциональны величинам потока энергии, вызывающим одинаковые ощущения $\frac{V(\lambda_2)}{V(\lambda_1)} = \frac{d\Phi_{\text{э}}(\lambda_1)}{d\Phi_{\text{э}}(\lambda_2)}$.

Пример. Пусть $V(\lambda)=0,5$. Это значит, что для того, чтобы свет с данной длиной волны λ создавал зрительное ощущение, такое же как и свет с длиной волны $\lambda_0 \approx 555$ ($V(\lambda_0)=1$), необходимо, чтобы поток энергии света с длиной волны λ был в

два раза больше потока энергии света с длиной волны $\lambda_0 \approx 555$ (с этим связана рекомендация окраски объектов в зелёный цвет для уменьшения раздражения глаз).

Световой поток – поток энергии, оцениваемый по зрительному ощущению. Величина светового потока, приходящегося на интервал длин световых волн от λ до $\lambda + d\lambda$, определяется соотношением $d\Phi = V(\lambda) d\Phi_{\text{э}}$ или $d\Phi = V(\lambda) \cdot \varphi(\lambda) \cdot d\lambda$. Единица измерения люмен (лм). Для светового потока в 1 лм с длиной волны $\lambda_0 \approx 555$ нм поток энергии равен 0,0146 Вт. *Механическим эквивалентом* света называется величина 0,0146 Вт/лм.

Сила света.

Для точечных источников сила равна отношению светового потока к величине телесного угла $I = \frac{d\Phi}{d\Omega}$ (Вт/ср – ватт делить на стерадиан). У изотропных точечных источников сила света не зависит от направления, поэтому $I = \frac{\Phi}{4\pi}$.

Для протяженных источников берётся отношение потока $d\Phi$, излучаемого элементом поверхности в направлении телесного угла $d\Omega$.

Сила света измеряется в канделах (кд): 1 кд = 1 лм/1 ср.

Освещённость.

Освещённость – это отношение величины светового потока, падающего на элемент поверхности к величине площади $E = \frac{d\Phi_{\text{пад}}}{dS}$. Единица измерения – люкс (лк). 1 лк = 1 лм/1 м².

Светимость – отношение светового потока, испускаемого площадкой по всем направлениям, к величине этой площадки

$$M = \frac{d\Phi_{\text{исп}}}{dS}$$

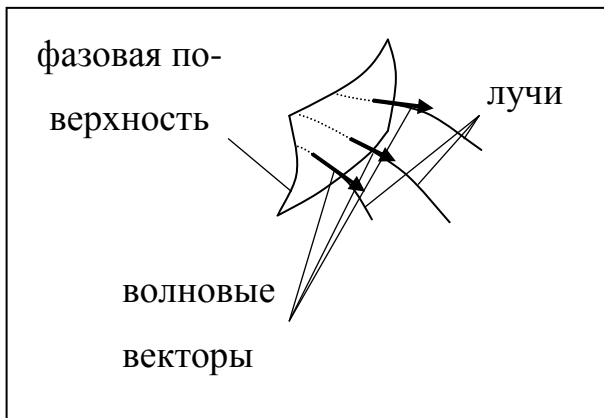
Яркость – характеристика излучения света площадкой dS в данном направлении - отношение силы, испускаемой источником в данном направлении к величине проекции площадки на плоскость, перпендикулярную данному направлению

$$L = \frac{d\Phi}{d\Omega dS_{\perp}}$$

Оптическая длина хода лучей.

Распространение волн удобно описывать с помощью понятия *луча*.

Луч – линия в пространстве, касательная к которой в каждой точке направ-



лена как волновой вектор. Таким образом, фазовая поверхность волны и касательная к лучу в точке их пересечения перпендикулярны друг к другу

Если волновой вектор задаётся в координатах $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$, то уравнение луча

имеет вид $\frac{dx}{k_x} = \frac{dy}{k_y} = \frac{dz}{k_z}$.

Для плоской волны лучи – это прямые, перпендикулярные фазовой поверхности. Для сферической волны – это прямые, выходящие из источника по радиальным направлениям.

В оптике *геометрической длиной* хода лучей l принято называть длину луча, а *оптической длиной* хода лучей величину $L = \int_{\text{луч}} n dl$, где n – показатель преломления вещества. В случае, когда показатель преломления вещества постоянный, оптическая длина хода лучей равна произведению показателя преломления на геометрическую длину хода $L = n \cdot l$.

Замечание. Физический смысл оптической длины хода можно уяснить из равенства

$$L = \int_{\text{луч}} n dl = \int_{\text{луч}} \frac{c}{v} dl = c \int_{\text{луч}} \frac{dl}{v} = c \cdot \Delta t$$

(v – фазовая скорость света в веществе). Т.е. это расстояние, которое пройдет свет в вакууме за тот же интервал времени Δt , в течение которого он движется в веществе с показателем преломления n .

Уравнение плоской электромагнитной наиболее просто записывается с помощью понятия луча

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kl + \varphi), \quad \vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\omega t - kl + \varphi)$$

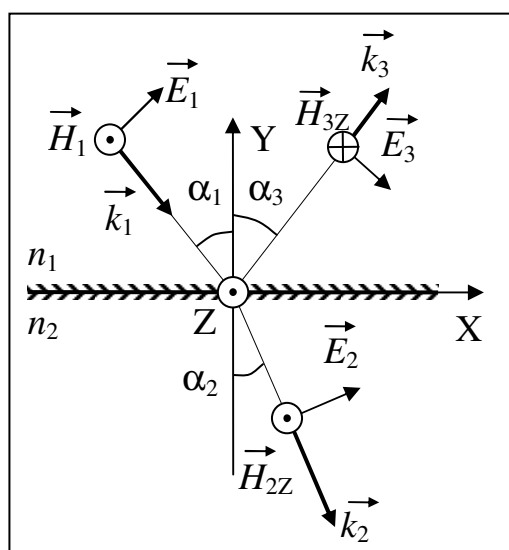
где l – геометрическая длина хода. Отсюда видно, что геометрическая длина хода может быть определена, как говорят, «с точностью» до длины волны $\frac{2\pi}{k} = \lambda$.

Из двух сред, та среда, показатель преломления у которой больше, называется *оптически более плотной*. Среда с меньшим показателем преломления называется, соответственно, *оптически менее плотной* средой.

Отражение и преломление плоской волны на границе раздела двух диэлектриков.

Рассмотрим падение *плоской* электромагнитной волны на плоскую границу раздела двух диэлектриков.

Плоскостью падения волны называется плоскость, перпендикулярная границе раздела сред и содержащая волновой вектор падающей волны.



Будем предполагать, что волна является линейно-поляризованной. Уравнения волны

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - (\vec{k}, \vec{r}) + \varphi), \quad \vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\omega t - (\vec{k}, \vec{r}) + \varphi),$$

$$\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\epsilon\epsilon_0}}.$$

Ход каждой из волн зададим с помощью лучей и соответствующих волновых векторов.

Рассмотрим *любую* точку на границе. В ней пересекаются три луча – луч *падающей* волны, луч *прошедшей* волны и луч *отражённой* волны.

Вдоль границы введём систему координат так, чтобы волновой вектор падающей волны лежал в плоскости (XY), где ось X направлена вдоль границы, а вектор Y перпендикулярен ей, а начало координат совпадало с выбранной точкой.

Тогда $\vec{k}_1 = (k_1 \sin \alpha_1, -k_2 \cos \alpha_1, 0)$, где угол α_1 между нормалью к границе (осью Y) и лучом падающей волны будем называть *углом падения*.

Будем обозначать параметры падающей волны индексом «1», прошедшей волны индексом «2», а отражённой – «3». Введём угол *преломления* α_2 и угол *отражения* α_3 - углы между нормалью и соответствующими лучами. Тогда

$$\vec{k}_2 = (k_2 \sin \alpha_2, -k_2 \cos \alpha_2, k_{2z}), \quad \vec{k}_3 = (k_3 \sin \alpha_3, k_3 \cos \alpha_3, k_{3z}).$$

В общем случае падающую волну можно представить в виде суперпозиции двух волн, у которых плоскости поляризации взаимно перпендикулярны. Поэтому рассмотрим падение волн с такой поляризацией по-отдельности.

1) Рассмотрим случай, когда в падающей волне вектор $\vec{H}_1 = (0, 0, H_1)$ параллелен границе, а вектор \vec{E}_1 лежит в плоскости (XY), т.е. $\vec{E}_1 = (E_{1x}, E_{1y}, 0)$. Как говорят, *волна поляризована в плоскости падения*.

Так как на границе должны выполняться условия $\vec{E}_{1t} + \vec{E}_{3t} = \vec{E}_{2t}$ и $\vec{H}_{1t} + \vec{H}_{3t} = \vec{H}_{2t}$, то $E_{1x} + E_{3x} = E_{2x}$ и $E_{3z} = E_{2z}$, $H_1 + H_{3z} = H_{2z}$ и $H_{3x} = H_{2x}$.

Кроме того, на границе выполняются условия $\vec{D}_{1n} + \vec{D}_{3n} = \vec{D}_{2n}$ и $\vec{B}_{1n} + \vec{B}_{3n} = \vec{B}_{2n}$, поэтому $\epsilon_1 (E_{1y} + E_{3y}) = \epsilon_2 E_{2y}$, $\mu_1 H_{3y} = \mu_2 H_{2y}$.

Как следует из этих уравнений координаты E_{2z} , E_{3z} , H_{2x} , H_{3x} , H_{2y} , H_{3y} не связаны никакими уравнениями с параметрами падающей волны. Поэтому их можно не рассматривать, т.е. считать равными нулю. Следовательно, прошедшая и отражённая волны являются линейно-поляризованными, т.к.

$$\vec{E}_2 = (E_{2x}, E_{2y}, 0), \quad \vec{E}_3 = (E_{3x}, E_{3y}, 0), \quad \vec{H}_2 = (0, 0, H_2), \quad \vec{H}_3 = (0, 0, H_3).$$

Тогда волновые векторы тоже лежат в плоскости (XY):

$$\vec{k}_2 = (k_{2x}, k_{2y}, 0), \quad \vec{k}_3 = (k_{3x}, k_{3y}, 0).$$

Уравнения для напряжённостей всех трех волн

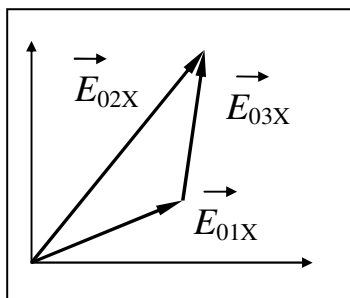
$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{01} \cos(\omega_1 t - (\vec{k}_1, \vec{r}) + \varphi_1), \quad \vec{E}_2 = \vec{E}_{02} \cos(\omega_2 t - (\vec{k}_2, \vec{r}) + \varphi_2), \quad \vec{E}_3 = \vec{E}_{03} \cos(\omega_3 t - (\vec{k}_3, \vec{r}) + \varphi_3)$$

Для них должно выполняться условие на границе $E_{1x} + E_{3x} = E_{2x}$. Точки границы задаются радиус-вектором $\vec{r} = (x, 0, z)$, поэтому на границе выполняется равенство

$$E_{01x} \cos(\omega_1 t - (k_{1x} x) + \varphi_1) + E_{03x} \cos(\omega_3 t - (k_{3x} x) + \varphi_3) = E_{02x} \cos(\omega_2 t - (k_{2x} x) + \varphi_2).$$

В частности, в точке $x=0$: $E_{01x} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + E_{03x} \cos(\omega_3 t + \varphi_3) = E_{02x} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$.

На амплитудно-векторной диаграмме сумма трех векторов постоянной длины



$\vec{E}_{01X} + \vec{E}_{03X} = \vec{E}_{02X}$ будет не зависеть от времени, если только угловые скорости вращения этих векторов одинаковые $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$. Т.е. частоты всех трех волн одинаковые. Обозначим эту частоту ω .

Теперь зафиксируем какой-то момент времени t_0 . Тогда в любой точке границы (для любого значения x) выполняется равенство

$$E_{01X} \cos(-(k_{1X}x) + \{\omega t_0 + \varphi_1\}) + E_{03X} \cos(-(k_{3X}x) + \{\omega t_0 + \varphi_3\}) = E_{02X} \cos(-(k_{2X}x) + \{\omega t_0 + \varphi_2\})$$

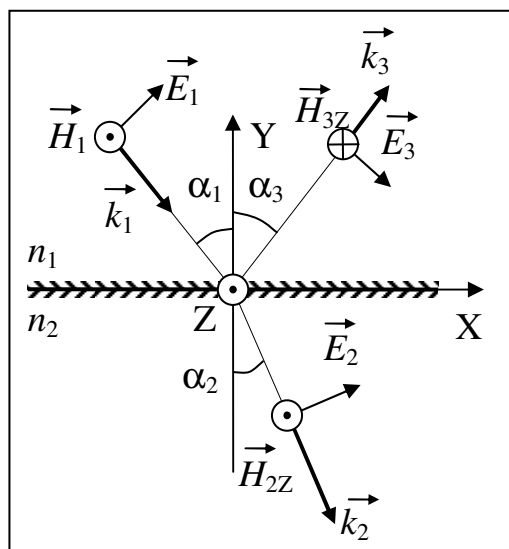
Так как величина x является параметром, то волновые числа k_{1X} , k_{2X} , k_{3X} будут являться аналогом угловой скорости вращения векторов \vec{E}_{01} , \vec{E}_{02} , \vec{E}_{03} на амплитудно-векторной диаграмме. Следовательно, равенство $\vec{E}_{01} + \vec{E}_{03} = \vec{E}_{02}$ возможно только в случае, когда $k_{1X} = k_{2X} = k_{3X}$.

Из $k_{1X} = k_{2X}$ следует соотношение $k_1 \sin \alpha_1 = k_2 \sin \alpha_2$. Т.к. $k_1 = \frac{\omega_1}{v_1} = \frac{\omega n_1}{c}$ и

$k_2 = \frac{\omega_2}{v_2} = \frac{\omega n_2}{c}$, то угол падения и угол преломления связаны соотношением

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$$

(закон Снеллиуса).



Из $k_{1X} = k_{3X}$ следует соотношение

$k_1 \sin \alpha_1 = k_3 \sin \alpha_3$. Т.к. падающая и отражённая волны распространяются в одной среде, то $k_1 = k_3$, откуда $\alpha_1 = \alpha_3$ - угол отражения равен углу падения.

Найдём соотношения между величинами напряжённостей. Предположим, что векторы напряжённостей электрического и магнитного полей в падающей, прошедшей и отражённой волнах в некоторый момент времени имеют направления, указанные на рисунке. Тогда

$\vec{E}_1 = (E_1 \cos \alpha_1, E_1 \sin \alpha_1, 0)$, $\vec{E}_2 = (E_2 \cos \alpha_2, E_2 \sin \alpha_2, 0)$ и $\vec{E}_3 = (E_3 \cos \alpha_1, -E_3 \sin \alpha_1, 0)$.

Условие $E_{1X} + E_{3X} = E_{2X}$ примет вид

$$E_{01} \cos \alpha_1 \cos(\omega t - (k_{1X}x) + \varphi_1) + E_{03} \cos \alpha_1 \cos(\omega t - (k_{1X}x) + \varphi_3) = E_{02} \cos \alpha_2 \cos(\omega t - (k_{2X}x) + \varphi_2)$$

Из $\varepsilon_1 (E_{1Y} + E_{3Y}) = \varepsilon_2 E_{2Y}$ получаем равенство

$$E_{01} \sin \alpha_1 \cos(\omega t - (k_{1X}x) + \varphi_1) - E_{03} \sin \alpha_1 \cos(\omega t - (k_{1X}x) + \varphi_3) = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} E_{02} \sin \alpha_2 \cos(\omega t - (k_{2X}x) + \varphi_2)$$

Получаем систему из двух уравнений

$$\begin{cases} E_{01} \cos \alpha_1 \cos(\omega t - (k_{1X}x) + \varphi_1) + E_{03} \cos \alpha_1 \cos(\omega t - (k_{1X}x) + \varphi_3) = E_{02} \cos \alpha_2 \cos(\omega t - (k_{2X}x) + \varphi_2) \\ E_{01} \sin \alpha_1 \cos(\omega t - (k_{1X}x) + \varphi_1) - E_{03} \sin \alpha_1 \cos(\omega t - (k_{1X}x) + \varphi_3) = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} E_{02} \sin \alpha_2 \cos(\omega t - (k_{2X}x) + \varphi_2) \end{cases}$$

Из закона преломления $n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$ следует, что уравнения выполняются в случае нормального падения волны на границу $\alpha_1 = 0$.

Предположим, что $\alpha_1 \neq 0$. Первое уравнение умножаем на $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \sin \alpha_2$, а второе

на $\cos \alpha_2$ и, вычитая из первого уравнения второе, получаем:

$$\begin{aligned} E_{01} \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \right) \cos(\omega t - (k_{1X}x) + \varphi_1) - \\ + E_{03} \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \right) \cos(\omega t - (k_{1X}x) + \varphi_3) = 0 \end{aligned}$$

Преобразуем это уравнение

$$\begin{aligned} \left(E_{01} \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \right) \cos(\varphi_1) + E_{03} \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \right) \cos(\varphi_3) \right) \cos(\omega t - (k_{1X}x)) \\ - \left(E_{01} \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \right) \sin(\varphi_1) + E_{03} \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \right) \sin(\varphi_3) \right) \sin(\omega t - (k_{1X}x)) = 0 \end{aligned}$$

В этом уравнении коэффициенты при $\cos(\omega t - (k_{1X}x))$ и $\sin(\omega t - (k_{1X}x))$ не зависят от времени. Поэтому они должны быть равными нулю. Равенства

$$E_{01} \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \right) \cos(\varphi_1) + E_{03} \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \right) \cos(\varphi_3) = 0$$

$$E_{03} \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \right) \sin(\varphi_3) + E_{01} \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \right) \sin(\varphi_1) = 0$$

выполняются одновременно при $\cos(\varphi_1) = \cos(\varphi_3)$ и $\sin(\varphi_1) = \sin(\varphi_3)$.

Перепишем эти условия в виде $\sin(\varphi_3) \cos(\varphi_1) - \cos(\varphi_3) \sin(\varphi_1) = 0$ и получим, что

$\sin(\varphi_3 - \varphi_1) = 0$, т.е. начальные фазы падающей и отражённой волн либо равны, либо отличаются друг от друга на π . Поэтому $\frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_3)} = \pm 1$ (либо $\frac{\sin(\varphi_1)}{\sin(\varphi_3)} = \pm 1$). Тогда

можно записать

$$E_{03} = -E_{01} \frac{\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \right)}{\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \right)} \left(\frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_3)} \right).$$

Для оптически прозрачных сред $\mu \approx 1$, поэтому $n \approx \sqrt{\varepsilon}$. С учётом $n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$, $\sin \alpha_1 \neq 0$ можно провести некоторые преобразования и получить

$$E_{03} = -E_{01} \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)} \left(\frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_3)} \right).$$

Величины амплитуд E_{01} и E_{03} положительные.

Т.к. $\alpha_1 \leq \pi/2$ и $\alpha_2 \leq \pi/2$, то $\alpha_1 + \alpha_2 \leq \pi$, поэтому $\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2) \geq 0$.

Следовательно, в случае $\alpha_1 - \alpha_2 \geq 0$, (т.е. когда $\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) \geq 0$) должно быть

$\frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_3)} = -1$ - фаза отражённой волны отличается от фазы падающей волны на π .

В этом случае $\alpha_1 \geq \alpha_2$, поэтому $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1} > 1$, т.е. волна отражается от *оптически более плотной среды*.

Случаю $\alpha_1 - \alpha_2 < 0$ соответствует отражение от *оптически менее плотной среды* и фаза отражённой волны совпадает с фазой падающей волны.

Возможен случай, когда нет отражённой волны $E_{03} = 0$. Это возможно либо при $\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$, т.е. $\alpha_1 = \alpha_2$ - волна не преломляется, либо при $\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2) \rightarrow +\infty$, т.е. $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi/2$ - **волновые векторы преломлённого луча и отраженного луча взаимно перпендикулярны**.

Тогда равенство $E_{03} = 0$ равносильно $\frac{n_2}{n_1} \cos \alpha_1 - \cos \alpha_2 = 0$. Но $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1$, поэто-

му $\frac{n_2}{n_1} \cos \alpha_1 = \sin \alpha_1$. Следовательно, если тангенс угла падения равен *относитель-*

ному показателю преломления двух сред,

$$\operatorname{tg} \alpha_B = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$$

то при отражении света от границы между ними нет волны, плоскость поляризации которой совпадает с плоскостью падения. Этот угол называется *углом Брюстера*.

Дальнейшее решение приводит к выражению

$$E_{02} = E_{01} \frac{2 \cos \alpha_1 \sin \alpha_2}{\cos(\alpha_2 - \alpha_1) \sin(\alpha_2 + \alpha_1)} \left(\frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_2)} \right)$$

Величины амплитуд E_{01} и E_{02} положительные.

Т.к. $\alpha_1 \leq \pi/2$ и $\alpha_2 \leq \pi/2$, то $\alpha_1 + \alpha_2 \leq \pi$, поэтому $\sin(\alpha_1 + \alpha_2) \geq 0$ и $\cos(\alpha_2 - \alpha_1) \geq 0$. Следовательно, должно быть $\frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_2)} = 1$, т.е. фазы прошедшей и падающей волн совпадают.

2) Рассмотрим случай, когда в падающей волне вектор $\vec{E}_1 = (0, 0, E_1)$ параллелен границе, а вектор \vec{H}_1 лежит в плоскости (XY), т.е. $\vec{H}_1 = (H_{1X}, H_{1Y}, 0)$. Волна поляризована в плоскости, перпендикулярной плоскости падения.

Так как на границе должны выполняться условия $\vec{E}_{1t} + \vec{E}_{3t} = \vec{E}_{2t}$ и $\vec{H}_{1t} + \vec{H}_{3t} = \vec{H}_{2t}$, то

$$E_{3X} = E_{2X} \text{ и } E_1 + E_{3Z} = E_{2Z}, \quad H_{3Z} = H_{2Z} \text{ и } H_{1X} + H_{3X} = H_{2X}.$$

Кроме того, на границе выполняются условия $\vec{D}_{1n} + \vec{D}_{3n} = \vec{D}_{2n}$ и $\vec{B}_{1n} + \vec{B}_{3n} = \vec{B}_{2n}$,

поэтому $\epsilon_1 E_{3Y} = \epsilon_2 E_{2Y}$, $\mu_1 (H_{1Y} + H_{3Y}) = \mu_2 H_{2Y}$.

Координаты E_{2X} , E_{3X} , E_{2Y} , E_{3Y} , H_{2Z} , H_{3Z} , не связаны никакими уравнениями с параметрами падающей волны. Поэтому их можно не рассматривать, т.е. считать равными нулю. Следовательно, прошедшая и отражённая волны являются линейно-поляризованными, т.к.

$$\vec{E}_2 = (0, 0, E_2), \quad \vec{E}_3 = (0, 0, E_3), \quad \vec{H}_2 = (H_{2X}, H_{2Y}, 0), \quad \vec{H}_3 = (H_{3X}, H_{3Y}, 0).$$

Результаты решения для этого случая сформулируем следующим образом.

Законы преломления остаются прежними $\alpha_3 = \alpha_1$, $n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$.

$$E_{03} = -E_{10} \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \left(\frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_3)} \right)$$

Т.к. $\alpha_1 \leq \pi/2$ и $\alpha_2 \leq \pi/2$, то $\alpha_1 + \alpha_2 \leq \pi$, поэтому $\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2) \geq 0$.

Следовательно, в случае $\alpha_1 - \alpha_2 \geq 0$, (т.е. когда $\sin(\alpha_1 - \alpha_2) \geq 0$) должно быть

$\frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_2)} = -1$ - фаза отражённой волны отличается от фазы падающей волны на π .

В этом случае $\alpha_1 \geq \alpha_2$, поэтому $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1} > 1$, т.е. волна отражается от оптически

более плотной среды.

Случаю $\alpha_1 - \alpha_2 < 0$ соответствует отражение от оптически менее плотной среды и фаза отражённой волны совпадает с фазой падающей волны.

$$E_{02} = E_{10} \frac{2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_1}{\sin(\alpha_2 + \alpha_1)} \left(\frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_2)} \right)$$

Поэтому должно быть $\frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_2)} = 1$, т.е. фазы преломлённой и падающей волн одинаковые.

наковые.

В итоге, закон преломления можно сформулировать следующим образом. Волновые векторы всех трёх волн лежат в одной плоскости падения. Угол падения равен углу отражения, угол преломления связан с углом отражения соотношением

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2.$$

Фазы падающей и прошедшей волн одинаковые. Фаза отраженной волны отличается от фазы падающей волны на π при отражении от оптически более плотной среды.

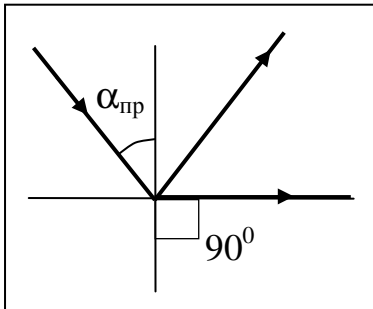
Падающая волна, отражённая и преломлённая волны поляризованы одинаково. Но если волна, поляризованная в плоскости падения, падает под углом Брюстера

$\operatorname{tg} \alpha_B = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$, то отраженная волна отсутствует.

Явление полного внутреннего отражения

Из соотношения $n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$ следует, что когда относительный показатель преломления со стороны падающего луча меньше единицы $\frac{n_2}{n_1} < 1$ существует такое значение угла падения, для которого угол преломления равен 90° .

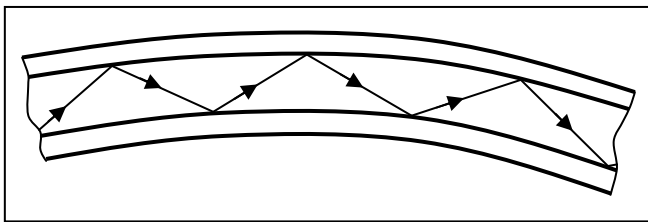
$$\sin \alpha_{\text{пр}} = \frac{n_2}{n_1}.$$



Этот угол называется *предельным углом падения*. При дальнейшем увеличении угла падения угол преломления не изменяется и остаётся равным 90° . Если угол падения больше или равен предельному углу, то луч преломлённой волны направлен вдоль границы раздела. Следова-

тельно, в этом случае волна, прошедшая во вторую среду, отсутствует (фаза отражённой волны совпадает с фазой падающей волны). Это явление называется *полным внутренним отражением*.

Явление полного внутреннего отражения широко применяется в науке и технике. Например, в *оптоволоконных кабелях* показатели преломления материалов, из которых изготовлены внутренняя и граничная области, подобраны так,



чтобы свет, распространяющийся внутри, полностью отражался от внешних границ. Это позволяет передавать световой поток практически без потерь.

Коэффициенты отражения и прозрачности.

Вектор Пойнтинга падающей волны представим в виде суммы вектора, параллельного границе и перпендикулярного к границе $\vec{\Pi} = \vec{\Pi}_t + \vec{\Pi}_n$.

Поток энергии волны через границу $\iint_S (\vec{\Pi}, d\vec{S}) = \iint_S \Pi_n dS$ определяется нормальной составляющей вектор Пойнтинга.

Но

$$\vec{\Pi} = (\vec{E} \times \vec{H}) = ((\vec{E}_n + \vec{E}_t) \times (\vec{H}_n + \vec{H}_t)) = (\vec{E}_n \times \vec{H}_n) + (\vec{E}_n \times \vec{H}_t) + (\vec{E}_t \times \vec{H}_n) + (\vec{E}_t \times \vec{H}_t).$$

Поэтому $\vec{\Pi}_t = (\vec{E}_n \times \vec{H}_n) + (\vec{E}_n \times \vec{H}_t) + (\vec{E}_t \times \vec{H}_n)$ и $\vec{\Pi}_n = (\vec{E}_t \times \vec{H}_t)$.

Так на границе выполняются равенства $\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t}$ и $\vec{H}_{1n} = \vec{H}_{2n}$, то

$$\vec{\Pi}_{1n} = (\vec{E}_{1t} \times \vec{H}_{1n}) = (\vec{E}_{2t} \times \vec{H}_{2n}) = \vec{\Pi}_{2n}.$$

Это равенство выражает закон сохранения энергии: при переходе через границу раздела диэлектриков величина нормальной составляющей вектора Пойнтинга не меняется, что означает, что энергия на границе не теряется.

В общем случае падения электромагнитной волны на границу раздела диэлектриков будут наблюдаться волна, отраженная от границы, и волна, прошедшая через границу. Так как $\vec{E}_{1t} = \vec{E}_t^{\text{ПАДАЮЩАЯ}} + \vec{E}_t^{\text{ОТРАЖЁННАЯ}}$ и $\vec{H}_{1n} = \vec{H}_n^{\text{ПАДАЮЩАЯ}} + \vec{H}_n^{\text{ОТРАЖЁННАЯ}}$, то на границе выполняется равенство $\vec{\Pi}_n^{\text{ПАДАЮЩАЯ}} + \vec{\Pi}_n^{\text{ОТРАЖЁННАЯ}} = \vec{\Pi}_n^{\text{ПРОШЕДШАЯ}}$.

1) Пусть падающая волна поляризована в плоскости падения $\vec{E}_1 = (E_{1x}, E_{1y}, 0)$,
 $\vec{H}_1 = (0, 0, H_1)$

Интенсивность – среднее значение величины вектора Пойнтинга

$$I_n^{\text{ПАДАЮЩАЯ}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_0}{\mu_1 \mu_0}} (E_{01})^2 \cos \alpha_1, \quad I_n^{\text{ОТРАЖЁННАЯ}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_0}{\mu_1 \mu_0}} \left(E_{01} \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)} \right)^2 \cos \alpha_1,$$

$$I_n^{\text{ПРОШЕДШАЯ}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_2 \epsilon_0}{\mu_2 \mu_0}} \left(E_{01} \frac{2 \cos \alpha_1 \sin \alpha_2}{\cos(\alpha_2 - \alpha_1) \sin(\alpha_2 + \alpha_1)} \right)^2 \cos \alpha_2.$$

Коэффициент отражения $R = \frac{I_n^{\text{ОТРАЖЁННАЯ}}}{I_n^{\text{ПАДАЮЩАЯ}}} = \left(\frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)} \right)^2$.

Коэффициент прозрачности (пропускания)

$$D = \frac{I_n^{\text{ПРОШЕДШАЯ}}}{I_n^{\text{ПАДАЮЩАЯ}}} = \frac{\sin 2\alpha_1 \sin 2\alpha_2}{\cos^2(\alpha_2 - \alpha_1) \sin^2(\alpha_2 + \alpha_1)}.$$

Вычисления показывают, что $R + D = 1$.

(Это выражение выражает собой закон сохранения энергии).

При нормальном падении, когда $\alpha_1 \ll 1$ получаем, что из $n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$ следует $n_1 \alpha_1 = n_2 \alpha_2$, $\cos \alpha_1 \approx 1$, $\cos \alpha_2 \approx 1$, тогда

$$R = \frac{(n_2 - n_1)^2}{(n_2 + n_1)^2}, \quad D = \frac{4n_1n_2}{(n_1 + n_2)^2}.$$

2) Пусть падающая волна поляризована в плоскости, перпендикулярной плоскости падения. Тогда коэффициент отражения

$$R = \frac{I_{\text{ОТРАЖЁННАЯ}}}{I_{\text{ПАДАЮЩАЯ}}} = \left(\frac{n_2 \cos \alpha_2 - n_1 \cos \alpha_1}{n_2 \cos \alpha_2 + n_1 \cos \alpha_1} \right)^2.$$

Коэффициент прозрачности (пропускания)

$$D = \frac{4n_1n_2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2}{(n_1 \cos \alpha_1 + n_2 \cos \alpha_2)^2}$$

Опять же выполняется равенство $R + D = 1$.

При нормальном падении, когда $\alpha_1 \ll 1$ получаем, что из $n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$ следует $n_1 \alpha_1 = n_2 \alpha_2$, $\cos \alpha_1 \approx 1$, $\cos \alpha_2 \approx 1$, тогда

$$R = \frac{(n_2 - n_1)^2}{(n_2 + n_1)^2}, \quad D = \frac{4n_1n_2}{(n_1 + n_2)^2}.$$

Следовательно, при малых углах падения коэффициенты отражения и пропускания для обоих случаев поляризации *одинаковые*.

Пример. Найдём отношение интенсивностей прошедшего и отражённого света на

границе воздух-стекло. В этом случае $\frac{I_{\text{ОТРАЖ}}}{I_{\text{ПРОШ}}} = \frac{R}{D} = \frac{R}{D} = \frac{(n_2 - n_1)^2}{4n_1n_2}$

Для границы воздух-стекло $n_{\text{ВОЗД}} \approx 1$, $n_{\text{СТЕКЛО}} \approx 1,5$ получаем $\frac{R}{D} = \frac{(n_2 - n_1)^2}{4n_1n_2} \approx 0,042$.

Т.е при нормальном падении от стекла отражается 4,2 % световой энергии.

Интерференция волн

Интерференция волн – взаимное усиление или ослабление когерентных волн при их наложении друг на друга (суперпозиции волн при одновременном распространении в пространстве), что приводит к перераспределению энергии колебаний, *устойчивому во времени*.

Наиболее выраженная интерференционная картина наблюдается в случае наложения волн одного направления. Применительно к электромагнитным волнам это означает, что плоскости поляризации волн должны быть одинаковыми.

Рассмотрим такие две плоские электромагнитные волны, распространяющиеся в разных направлениях, у которых плоскости поляризации параллельны оси Z.

1) Пусть амплитуды волн одинаковые. Вдоль лучей уравнения волн будут иметь вид

$$E_1 = E_0 \cos(\omega_1 t - k_1 l_1 + \varphi_1), \quad E_2 = E_0 \cos(\omega_2 t - k_2 l_2 + \varphi_2).$$

По принципу суперпозиции волновых полей

$$E_{\Sigma} = E_1 + E_2 = E_0 \cos(\omega_1 t - k_1 l_1 + \varphi_1) + E_0 \cos(\omega_2 t - k_2 l_2 + \varphi_2),$$

$$E_{\Sigma} = 2E_0 \cos\left(\frac{(\omega_1 - \omega_2)}{2} t - \frac{k_1 l_1 - k_2 l_2}{2} + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \cos\left(\frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2} t - \frac{k_1 x + k_2 y}{2} + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right).$$

Если амплитуду результирующей волны записать в виде

$$A_{\Sigma} = 2E_0 \left| \cos\left(\frac{(\omega_1 - \omega_2)}{2} t - \frac{k_1 l_1 - k_2 l_2}{2} + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \right|,$$

то суперпозиция волн описывается уравнением

$$E_{\Sigma} = A_{\Sigma} \cos\left(\frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2} t - \frac{k_1 x + k_2 y}{2} + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + \theta\right)$$

где

$$\theta=0 \text{ при } \cos\left(\frac{(\omega_1 - \omega_2)}{2} t - \frac{k_1 l_1 - k_2 l_2}{2} + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \geq 0,$$

$$\text{и } \theta=\pi \text{ при } \cos\left(\frac{(\omega_1 - \omega_2)}{2} t - \frac{k_1 l_1 - k_2 l_2}{2} + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) < 0.$$

Амплитуда результирующей волны

$$A_{\Sigma} = 2E_0 \left| \cos\left(\cos\left(\frac{(\omega_1 - \omega_2)}{2} t - \frac{k_1 l_1 - k_2 l_2}{2} + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)\right) \right|$$

не будет зависеть от времени в случае, если частоты волн совпадают $\omega_1 = \omega_2$

и величина $\varphi_1 - \varphi_2$ не зависит от времени.

Замечание. В естественном излучении содержатся волны, испущенные атомами вещества при спонтанных и вынужденных процессах излучения. При этом доля спонтанного излучения значительно больше доли вынужденного. Но при спонтанном излучении, даже в случае равенства частот, начальные фазы волн, испускаемых атомами, никак не согласованы друг с другом. Время процесса излучения каждого атома очень мало и, поэтому при длительном наблюдении суперпозиции волн величина $\varphi_1 - \varphi_2$, вообще говоря, будет меняться во времени хаотическим образом.

Когерентными называются волны, разность фаз которых не зависит от времени.

Всякая реальная световая волна представляет собой суперпозицию волн, длины которых заключены в некотором интервале $\Delta\lambda$. Световая волна (волновой пакет), для которой $\Delta\lambda \ll \lambda$, называется *квазимонохроматической*.

Для монохроматических волн условие когерентности равносильно равенству частот этих волн $\omega_1 = \omega_2$, но в общем случае необходимо еще и равенство начальных фаз.

Предположим, что волны являются когерентными, а начальные фазы равны нулю. В этом случае величина результирующей амплитуды

$$A_{\Sigma} = 2E_0 \left| \cos \left(\frac{k_2 l_2 - k_1 l_1}{2} \right) \right|$$

зависит от величины $\frac{k_2 l_2 - k_1 l_1}{2}$.

В случаях, когда $k_2 l_2 - k_1 l_1 = \pm\pi$ или $k_2 l_2 - k_1 l_1 = \pm 3\pi$ и т.д, т.е при $k_2 l_2 - k_1 l_1 = \pm\pi(2m+1)$, (т.к для любого натурального m число $(2m+1)$ всегда нечётное) суммарная амплитуда равна нулю $A_{\Sigma} = 0$.

Но в случаях, когда $k_2 l_2 - k_1 l_1 = 0$ или $k_2 l_2 - k_1 l_1 = \pm 2\pi$ и т.д, т.е при $k_2 l_2 - k_1 l_1 = \pm 2\pi m$, суммарная амплитуда максимальная $A_{\Sigma} = 2E_0$.

Так как интенсивность волны пропорциональна квадрату амплитуды $I \sim A^2$, то в точках пространства, где амплитуда равна нулю, результирующая интенсив-

ность тоже равна нулю, а при максимальной амплитуде результирующей волны интенсивность тоже будет максимальной.

Рассмотрим подробнее величину $kl = \frac{\omega}{v}l$. Фазовая скорость волны

определяется показателем преломления вещества $v = \frac{c}{n}$, а циклическая частота

колебаний связана с периодом соотношением $\omega = \frac{2\pi}{T}$, поэтому $kl = \frac{\omega}{v}l = \frac{2\pi}{cT}nl$. Од-

нако, длина электромагнитной волны в вакууме равна $\lambda = cT$, а величина $L = nl$

является *оптической длиной хода* лучей, следовательно $kl = \frac{2\pi}{\lambda}L$.

В случае равенства частот двух волн $\omega_1 = \omega_2$ их длины волн в вакууме тоже одинаковые $\lambda_1 = \lambda_2$. Поэтому можно переписать условия минимумов и максимумов результирующей амплитуды (или интенсивности).

Условие минимума примет вид

$$k_2l_2 - k_1l_1 = \frac{2\pi}{\lambda_2}n_2l_2 - \frac{2\pi}{\lambda_1}n_1l_1 = \frac{2\pi}{\lambda}(L_2 - L_1) = \pi(2m+1), \text{ откуда } L_2 - L_1 = (2m+1)\frac{\lambda}{2}.$$

Соответственно, для максимумов

$$k_2l_2 - k_1l_1 = \pm 2\pi m, \text{ откуда } L_2 - L_1 = m\lambda$$

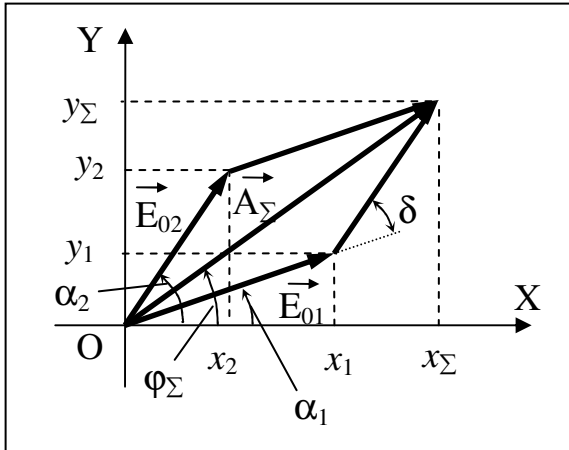
Будем в дальнейшем называть разность оптических длин хода лучей просто *оптической разностью хода* лучей (или волн).

Условие минимума. Если оптическая разность хода лучей до точки наблюдения равна нечётному числу длин полуволин (в вакууме), то в точке наблюдается минимум интерференционной картины $L_2 - L_1 = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$.

Условие максимума. Если оптическая разность хода лучей до точки наблюдения равна целому числу длин волн (в вакууме), то в точке наблюдается максимум интерференционной картины $L_2 - L_1 = m\lambda$.

2) Пусть в пространстве перекрываются два волновых поля с разными амплитудами

$$E_1 = E_{01} \cos(\omega_1 t - k_1 l_1 + \varphi_1), \quad E_2 = E_{02} \cos(\omega_2 t - k_2 l_2 + \varphi_2)$$



Рассмотрим соответствующую ампли-

тудно-векторную диаграмму. По теореме коси-
нусов

$$A_\Sigma^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 - 2E_{01}E_{02} \cos(\pi - \delta)$$

Учтем, что $\cos(\pi - \delta) = -\cos \delta$,

где $\delta = \alpha_2 - \alpha_1 = (\omega_2 - \omega_1)t - (k_2 l_2 - k_1 l_1) + \varphi_2 - \varphi_1$, тогда

$$A_\Sigma^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \cos \delta.$$

Для когерентных волн разность фаз волн

должна быть постоянной во времени (в частности $\omega_2 = \omega_1$), поэтому результирующая амплитуда не зависит от времени

$$A_\Sigma^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \cos(k_2 l_2 - k_1 l_1 - (\varphi_2 - \varphi_1)).$$

Для интенсивностей волн справедливы зависимости $I_1 \sim E_{01}^2$, $I_2 \sim E_{02}^2$, $I_\Sigma \sim A_\Sigma^2$ с одинаковыми коэффициентами пропорциональности, поэтому при интерференции

$$I_\Sigma = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(k_2 l_2 - k_1 l_1 - (\varphi_2 - \varphi_1)).$$

В тех точках пространства, где

$\cos(k_2 l_2 - k_1 l_1 - (\varphi_2 - \varphi_1)) = -1$ наблюдается минимум интерференционной картины,

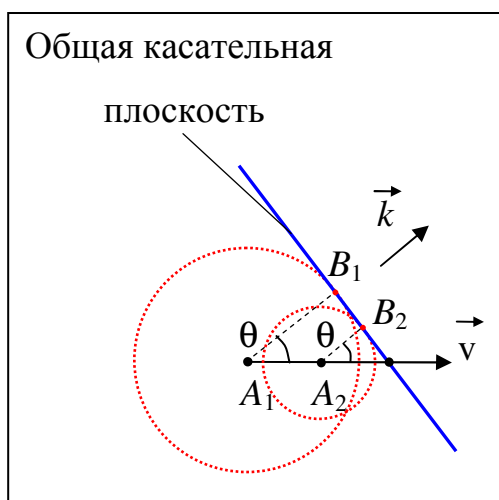
$\cos(k_2 l_2 - k_1 l_1 - (\varphi_2 - \varphi_1)) = 1$ - максимум.

Пример. Рассмотрим эффект Вавилова-Черенкова.

Пусть заряженная частица движется по прямой линии в веществе с постоянной скоростью, величина которой больше фазовой скорости света в веществе

$v > \frac{c}{n}$. При своём движении частица непрерывно излучает электромагнитные вол-

ны, которые можно рассматривать как сферические. Когда, например, частица находилась в точках A_1 и A_2 она излучила две сферические волны. Скорость волны меньше скорости частицы, поэтому в направлении движения частицы вторая волна «обгонит» первую. Но в этом случае к этим двум сферическим поверхностям в какой-то момент времени можно построить общую касательную плоскость. Обо-



значим точки касания B_1 и B_2 . Лучи A_1B_1 и A_2B_2 параллельны друг другу и перпендикулярны этой плоскости.

При дальнейшем движении фазовых поверхностей выбранных двух сферических волн касательная плоскость будет также двигаться в направлении лучей A_1B_1 и A_2B_2 со скоростью равной фазовой скорости света. Можно рассматри-

вать эту плоскость как фазовую поверхность некоторой плоской волны (с волновым вектором \vec{k}). Но тогда фазы плоской волны (на этой плоскости), первой сферической и второй сферической волн в точках касания B_1 и B_2 должны быть одинаковыми. Следовательно, разность фаз сферических волн в направлении, задаваемом углом θ постоянна и равна 0. Волны являются *когерентными* в данном направлении и при интерференции усиливают друг друга.

Тогда из равенства промежутков времени $\frac{|A_1B_1|}{(c/n)} = \frac{|A_1A_2|}{v} + \frac{|A_2B_2|}{(c/n)}$ и из рисунка

$$|A_1B_1| = |A_1A_2| \cos \theta + |A_2B_2| \quad \text{следует} \quad \frac{|A_1A_2| \cos \theta + |A_2B_2|}{(c/n)} = \frac{|A_1A_2|}{v} + \frac{|A_2B_2|}{(c/n)}.$$

Откуда

$$\cos \theta = \frac{c}{nv}.$$

Касательных плоскостей, соответствующих другим значениям углов не существует, поэтому разность фаз волн в этих направлениях не будет постоянной, следовательно, волны не будут когерентными.

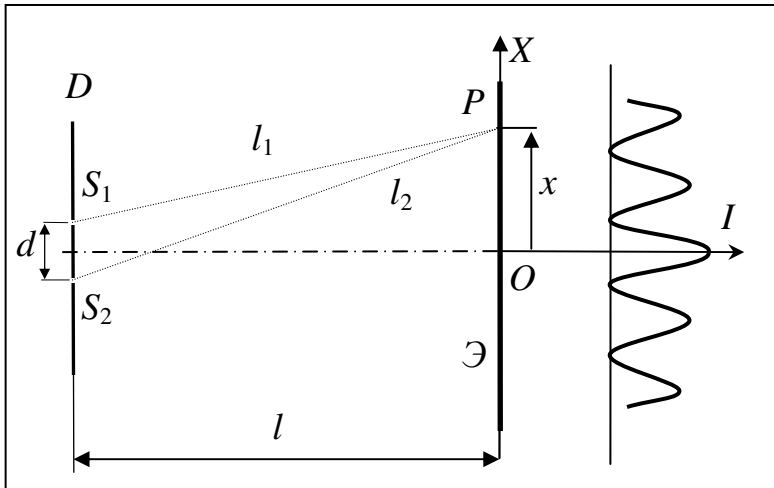
Если же скорость частицы меньше фазовой скорости света, то указанную касательную плоскость построить невозможно.

Интерференция двух цилиндрических волн.

(двулучевая интерференция).

Рассмотрим интерференцию от двух очень узких щелевых источников монохроматического света.

Рассмотрим непрозрачную перегородку (D), в которой есть две узкие щели (S_1 и S_2), являющиеся источниками света. Интерференционную картину наблюдают на экране (\mathcal{E}). Расстояние между щелями много меньше расстояния между экраном и перегородкой $d \ll l$.



Показатель преломления среды

принимается равным единице $n = 1$.

Интерференционная картина на экране представляет собой череду параллельных тёмных и светлых полос. Будем предполагать, что начальные фазы колебаний от источников равны. Тогда центральная полоса (O), расположенная симметрично относительно источников будет всегда светлой. Вдоль экрана направим ось X , чтобы координата $x=0$ соответствовала точке O .

Оптическая разность хода лучей от источников до некоторой полосы (P) равна

$$L_2 - L_1 = l_2 - l_1 = \frac{l_2^2 - l_1^2}{l_2 + l_1}$$

Т.к. $d \ll l$, то при небольших значениях x можно предполагать, что $l_2 + l_1 \approx 2l$.

Учитывая, что $l_1^2 = l^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2$ и $l_2^2 = l^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2$, получаем, что

$$L_2 - L_1 \approx \frac{l^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 - l^2 - \left(x - \frac{d}{2}\right)^2}{2l} = \frac{2xd}{2l}.$$

Светлые полосы соответствуют максимуму интенсивности. В этом случае оптическая разность хода равна целому числу длин волн $\frac{xd}{l} = m\lambda$, откуда координаты

максимумов $x_m^{MAX} = m \frac{l}{d} \lambda$.

Два соседних максимума с номерами m и $m+1$ находятся на расстоянии, величина которого называется *шириной интерференционной полосы* $\Delta x = \frac{l}{d}\lambda$.

Тёмные полосы соответствуют минимуму интенсивности. В этом случае оптическая разность хода равна нечётному числу длин полуволен $\frac{xd}{l} = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$, откуда координаты минимумов $x_m^{MIN} = (2m+1)\frac{l}{d}\frac{\lambda}{2}$.

Два соседних минимума с номерами m и $m+1$ находятся на расстоянии $\Delta x = \frac{l}{d}\lambda$. Т.е. расстояния между соседними максимумами и соседними минимумами одинаковые.

Из формулы для ширины интерференционной Δx полосы можно найти угловое расстояние между источниками γ – угол, под которым видны из точки O источники S_1 и S_2 $\gamma = 2\arctg\left(\frac{d}{2l}\right) \approx \frac{d}{l} = \frac{\lambda}{\Delta x}$.

Теперь предположим, что свет квазимонохроматический и содержит две волны с длинами λ и $\lambda + \Delta\lambda$. Тогда на экране общая интерференционная картина является результатом наложения двух картин: для длин волн λ и $\lambda + \Delta\lambda$. Координаты максимумов и минимумов для этих волн разные. Поэтому может произойти совпадения максимумов для одной длины волны с минимумами другой. Найдём номер первого совпадения из условия $x_m^{MIN}(\lambda) = x_m^{MAX}(\lambda + \Delta\lambda)$:

$$(2m+1)\frac{l}{d}\frac{\lambda}{2} = m\frac{l}{d}(\lambda + \Delta\lambda)$$

Откуда $m = \frac{\lambda}{2\Delta\lambda}$. Следовательно, можно ожидать, что будут видны максимумы с номерами меньшими m . Т.к. нумерация начинается с номера $m=0$, отвечающему центральному максимуму, то общее число (первых) различимых полос будет равно $N = 2(m-1)+1 = 2m-1 = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} - 1$.

Величина $\frac{\lambda}{\Delta\lambda}$ называется *степенью монохроматичности* света.

Следовательно, число видимых полос прямо пропорционально степени монохроматичности света. Чем больше степень монохроматичности, тем больше интерференционных полос видно – можно сказать, что в этом случае свет «ближе» к монохроматичному.

На границе видимой интерференционной картины оптическая разность хода

$$L_2 - L_1 \approx \frac{x_{\text{ГРАН}} d}{l} = \frac{m \Delta x d}{l} = \frac{\lambda}{2 \Delta \lambda} \frac{l}{d} \lambda \frac{d}{l} = \frac{\lambda^2}{2 \Delta \lambda}$$

зависит только от параметров волны.

Вся интерференционная картина будет заключена в области, размер которой

$$L_{\text{interf}} = 2m \cdot \Delta x = 2 \frac{\lambda}{2 \Delta \lambda} \frac{l}{d} \lambda = \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda} \frac{l}{d}$$

Учитывая, что величина $\gamma \approx \frac{d}{l}$ определяет угловой размер источника, получаем соотношение, не зависящее от геометрических размеров установки для наблюдения интерференции:

$$\frac{\lambda^2}{\Delta \lambda} = L_{\text{interf}} \gamma.$$

Теперь рассмотрим эту модель по-другому. Найдём суперпозицию волны с длиной λ от источника S_1 с волной длины $\lambda + \Delta \lambda$ от источника S_2 .

$$E_{\Sigma} = E_0 \cos\left(\frac{2\pi c}{\lambda} t - \frac{2\pi}{\lambda} l_1\right) + E_0 \cos\left(\frac{2\pi c}{\lambda + \Delta \lambda} t - \frac{2\pi}{\lambda + \Delta \lambda} l_1\right)$$

$$E_{\Sigma} = 2E_0 \cos\left(\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi c}{\lambda} - \frac{2\pi c}{\lambda + \Delta \lambda}\right)t - \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi l_1}{\lambda} - \frac{2\pi l_1}{\lambda + \Delta \lambda}\right)\right) \cos\left(\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi c}{\lambda} + \frac{2\pi c}{\lambda + \Delta \lambda}\right)t - \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi l_1}{\lambda} + \frac{2\pi l_1}{\lambda + \Delta \lambda}\right)\right)$$

Полагая $\Delta \lambda \ll \lambda$, получим $\frac{1}{\lambda + \Delta \lambda} = \frac{1}{\lambda \left(1 + \frac{\Delta \lambda}{\lambda}\right)} = \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{\Delta \lambda}{\lambda} + \dots\right) \approx \frac{1}{\lambda} - \frac{\Delta \lambda}{\lambda^2}$. Тогда для ам-

плитуды суммарного колебания

$$A_{\Sigma} = 2A_0 \left| \cos\left(\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi c}{\lambda} - \frac{2\pi c}{\lambda} - \frac{2\pi c \Delta \lambda}{\lambda^2}\right)t - \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi l_1}{\lambda} - \frac{2\pi l_1}{\lambda} - \frac{2\pi \Delta \lambda l_1}{\lambda^2}\right)\right) \right|$$

$$A_{\Sigma} = 2A_0 \left| \cos\left(\frac{\pi c \Delta \lambda}{\lambda^2} t - \left(\frac{\pi(l_2 - l_1)}{\lambda} + \frac{\pi \Delta \lambda l_2}{\lambda^2}\right)\right) \right|$$

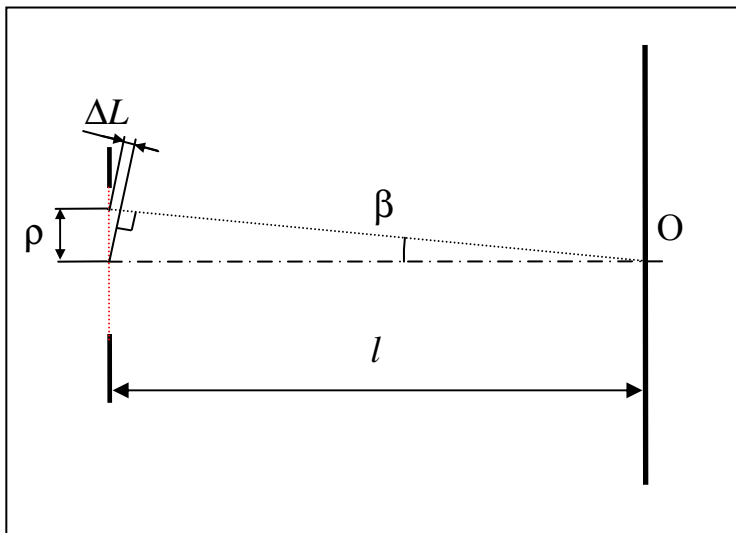
В любой точке экрана амплитуда результирующего колебания зависит от времени. Период времени, за который величина амплитуды дойдёт от нулевого значения до максимального, и обратно, называют *временем когерентности*

$$t_{\text{ког}} = \frac{\pi}{\left(\frac{\pi c \Delta \lambda}{\lambda^2}\right)} = \frac{\lambda^2}{c \Delta \lambda}.$$

Длиной когерентности называется расстояние проходимое светом за время, равное времени когерентности $l_{\text{ког}} = c \cdot t_{\text{ког}} = \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda}$.

Как видно, эта величина пропорциональна максимальной разности хода лучей *квазимонохроматических* волн, при которой еще видна интерференционная картина.

Теперь предположим, что щель имеет конечные размеры. И пусть свет будет



монохроматическим. Будем рассматривать интенсивность в центральной точке экрана (O).

Если разность хода лучей от центральной точки щели и какой-то точки на расстоянии ρ от неё до точки O равна нечётному числу длин полуволн, то в этой точке экрана волны от этих двух точек будут колебаться в противофазе, следовательно, будут «гасить» друг друга. Поэтому в щели можно выделить симметричную зону длиной такую, что источники внутри этой зоны не «гасят» друг друга, т.к. оптическая разность хода лучей от них до точки O не больше $\frac{\lambda}{2}$.

С учётом малости углов $\Delta L = \rho \sin \beta \approx \rho \frac{\gamma}{2}$, где $\gamma \approx \frac{2\rho}{l}$ - угловой размер центральной части источника. Тогда, условие того, что в точке *O* не будет волн, колеблющихся в противофазе, можно записать в виде $\rho \frac{\gamma}{2} < \frac{\lambda}{2}$. Т.е. расстояние между крайней и центральной точками протяженного источника монохроматического излучения должно определяться соотношением $\rho\gamma < \lambda$, тогда в центральной точке экрана будет наблюдаться максимальная интенсивность.

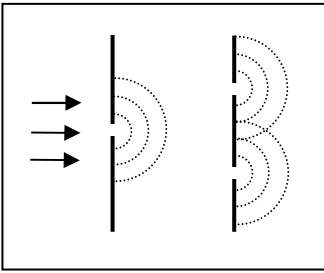
Пространственная и временная когерентность.

Волны естественного излучения являются суперпозицией множества волн от точечных источников, излучающих спонтанно. Даже в волне, спонтанно испущенной одним источником, частота меняется в узком диапазоне. Фазы двух волн излученных друг за другом одним источником никак не связаны друг с другом. Все это приводит к тому, что в результирующей волне частота и фаза являются усредненными величинами по излучению множества источников. Поэтому их значения колеблются случайным образом около неких средних значений. Следовательно, колебания разных точек волновой поверхности, вообще говоря, могут не быть когерентными.

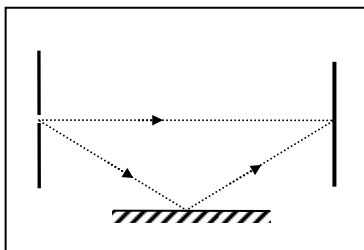
Рассмотрим две разные точки одной волновой поверхности в один и тот же момент времени. Максимальное расстояние (вдоль этой поверхности), на котором излучение в точках ещё являются когерентными, называется *радиусом пространственной когерентности*. Эта величина определяется соотношением $\rho \sim \frac{\lambda}{\gamma}$, где λ - основная длина волны, γ - угловой размер источника (из точки наблюдения).

Пример. Для излучения Солнца $\lambda=0,55$ мкм, $\gamma \approx 0,01$ рад. Откуда $\rho \approx 0,05$ мм. Это значит, что для наблюдения интерференционной картины от солнечного света, необходимо, чтобы две щели в непрозрачном экране находились на расстоянии не более 0,05 мм. При этом можно оценить размер интерференционной картины из соотношения $\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = L_{interf} \gamma$. Если принять, что для солнечного света $\Delta\lambda \approx 0,2$ мкм, то

$L_{interf} = \frac{\lambda^2}{\gamma \Delta \lambda} = \frac{0,55^2 \cdot 10^{-12}}{0,01 \cdot 0,2 \cdot 10^{-6}} \approx 1,5 \cdot 10^{-4}$ м. Изображение такого размера увидеть невооружённым глазом практически невозможно.



Для увеличения размера изображения необходимо уменьшить угловой размер источника. Это можно сделать с помощью *ещё одного* непрозрачного экрана, в котором сделана щель, свет из которой будет являться источником для двух других щелей. ♣



Так как начальная фаза волны естественного света меняется спонтанно, то разность фаз двух волн одинаковой частоты, испущенных из одной и той же точки волновой поверхности, но в *разное время*, вообще говоря, будет меняться во времени. Т.е. волны не будут являться когерентными. В этом случае говорят о *временной когерентности*.

Следовательно, если рассмотреть интерференцию лучей, прямо из щели попадающих на экран и лучей, попадающих после отражения от зеркала, интерференция возможна в случае, если разность хода лучей не больше длины когерентности

$$\Delta l \leq l_{КОГ}$$

Поэтому можно определить время когерентности $t_{КОГ} = \frac{l_{КОГ}}{c} = \frac{\lambda^2}{c \Delta \lambda}$.

Пример. Для солнечного света длина когерентности $l_{КОГ} = \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda} = \frac{0,55^2 \cdot 10^{-12}}{0,2 \cdot 10^{-6}} \approx 1,5 \cdot 10^{-6}$

м, поэтому интерференцию можно наблюдать только в тонких плёнках, а в оконном стекле – нет. Время когерентности $t_{КОГ} = \frac{l_{КОГ}}{c} \approx 0,5 \cdot 10^{-14}$ с.