Лекция 17. Взаимодействие электромагнитных волн с веществом.

Электронная теория дисперсии. Нормальная и аномальная дисперсия.
Закон Бугера. Рассеяние света.

Рассмотрим классическую модель взаимодействия электромагнитного излучения с веществом. Эта модель приводит к качественно верным результатам, но достоинством её рассмотрения является простота описания.

При прохождении электромагнитной волны через вещество на заряженные частицы, входящие в атомы (и молекулы) вещества будет действовать сила Лоренца

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \left(\vec{v} \times \vec{B}\right)\right).$$

Найдем отношение величин магнитной и электрической составляющих этой силы

$$\frac{F_М}{F_Э} = \frac{qvB}{qE} = \frac{v\mu_0 H}{E} = v\mu_0\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} = \frac{v}{c}.$$

Движение частиц в атомах ограничено в пространстве (как говорят, движение является финитным), поэтому его можно представить как колебания вблизи (усреднённых) положений равновесия. Амплитуда скорости частиц связана с амплитудой колебаний $v = \omega A_0$. Циклическая частота вынужденных колебаний совпадает с частотой волны $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$, поэтому

$$\frac{F_М}{F_Э} = \frac{v}{c} = \frac{\omega A_0}{c} = \frac{2\pi c}{\lambda}\frac{A_0}{c} = 2\pi\frac{A_0}{\lambda}.$$

Из этого соотношения видно, что магнитная сила по величине много меньше электрической, если амплитуда колебаний много меньше длины волны $A_0 << \lambda$.

При рассмотрении движения заряженных частиц, входящих в состав атомов вещества амплитуда колебаний не превышает размеров атомов, т.е. $A_0 \sim 10^{-10}$ м. Следовательно, в случае электромагнитной волны, например, видимого света, для которой $\lambda \sim 10^{-7} \div 10^{-6}$ м условие $\frac{F_М}{F_Э} = \frac{v}{c} = 2\pi\frac{A_0}{\lambda} << 1$ можно считать выполненным.

Это означает, что можно пренебречь магнитной силой (и сообщаемым ею ускорением) и рассматривать вынужденные колебания заряженных частиц в неподвижных атомах как линейные колебания электронов вдоль направления вектора $\vec{E}$.

Рассмотрим плоскую монохроматическую электромагнитную волну, распространяющуюся вдоль оси X, в которой для вектора напряженности

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(\omega t - kx + \varphi).$$

Пусть волна линейно поляризована вдоль Y. Тогда вектор напряженности в координатах имеет вид $\vec{E} = (0, E, 0)$ и $E = E_0 \sin(\omega t - kx + \varphi)$.

Предположим, что в точке, с координатами $\vec{r} = (x_0, 0, 0)$ находится заряженная частица массы m и зарядом q. Уравнение движения частицы вдоль оси Y

$$ma = F_{УПР} + F_{ВЫН} + F_{P\_ТРЕН}$$

где

$F_{УПР} = -k \cdot y$ - сила упругости, возникающая при смещении частицы от положения устойчивого равновесия (как следует из лекций предыдущего семестра для квазиупругой силы $k = -\frac{d^2 W_{ПОТ}}{dx^2} > 0$);

$F_{ВЫН} = qE_y = qE_0 \sin(\omega t - kx_0 + \varphi)$ - вынуждающая сила со стороны электромагнитной волны;

$F_{P\_ТРЕН} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q^2}{3c^3}\frac{da}{dt}$ - сила радиационного трения.

Т.е.

$$ma = -k \cdot y + qE_y + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q^2}{3c^3}\frac{da}{dt}.$$

Обозначим $\eta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q^2}{3c^3}$ и перепишем уравнение $\dddot{y} = \frac{m}{\eta}\ddot{y} + \frac{k}{\eta}y - \frac{q}{\eta}E_y$.

Проделаем некоторые очевидные преобразования:

- сначала вычтем из обеих частей равенства выражение $\alpha\ddot{y}$, где α - вещественное число:

$$\dddot{y}-\alpha\ddot{y}=\frac{m}{\eta}\ddot{y}-\alpha\ddot{y}+\frac{k}{\eta}y-\frac{q}{\eta}E_y;$$

- затем в правой части вычтем и прибавим слагаемое, пропорциональное $\dot{y}$:

$$\dddot{y}-\alpha\ddot{y}=\left(\frac{m}{\eta}-\alpha\right)\left(\ddot{y}-\alpha\dot{y}\right)+\left(\frac{m}{\eta}-\alpha\right)\alpha\left(\dot{y}+\frac{k}{\eta\left(\frac{m}{\eta}-\alpha\right)\alpha}y\right)-\frac{q}{\eta}E_y.$$

Если потребовать выполнение равенства $\frac{k}{\eta\left(\frac{m}{\eta}-\alpha\right)\alpha}=-\alpha$, то можно ввести новую переменную $s=\dot{y}-\alpha y$, где константа α определяется из кубического уравнения $\eta\alpha^3-m\alpha^2-k=0$. Т.к. это алгебраическое уравнение нечётной степени, то оно обязательно имеет, хотя бы один, *вещественный* корень α.

Теперь найдем знаки у коэффициентов дифференциального уравнения. Т.к. $\frac{k}{\eta\left(\frac{m}{\eta}-\alpha\right)}=-\alpha^2$, то $\left(\frac{m}{\eta}-\alpha\right)=-\frac{k}{\eta\alpha^2}<0$, откуда $\alpha>\frac{m}{\eta}>0$, следовательно $\left(\frac{m}{\eta}-\alpha\right)\alpha<0$. Если ввести новые обозначения $\left(\frac{m}{\eta}-\alpha\right)=-\frac{k}{\eta\alpha^2}=-2\beta<0$ и $\left(\frac{m}{\eta}-\alpha\right)\alpha=-\omega_0^2<0$, то новая переменная $s=\dot{y}-\alpha y$ будет являться решением уравнения обыкновенного дифференциального уравнения $\ddot{s}=-2\beta\dot{s}-\omega_0^2 s-\frac{q}{\eta}E_y$ или

$$\ddot{s}+2\beta\dot{s}+\omega_0^2 s=-\frac{q}{\mu}E_0\,sin\left(\omega t-kx_0+\varphi\right).$$

Это уравнение вынужденных колебаний. Как известно из предыдущего семестра (см. лекции 1-го курса), в этом случае общее решение является суммой решения, затухающего с течением времени $s_{ЗАТ}=A_{ЗАТ}e^{-\beta t}\,sin\left(\omega_{ЗАТ}t+\varphi_{ЗАТ}\right)$, и решения, описывающего вынужденные колебания с частотой вынуждающей силы

$$s_{ВЫН}=A_{ВЫН}\,sin\left(\omega_{ВЫН}t+\varphi_{ВЫН}\right).$$

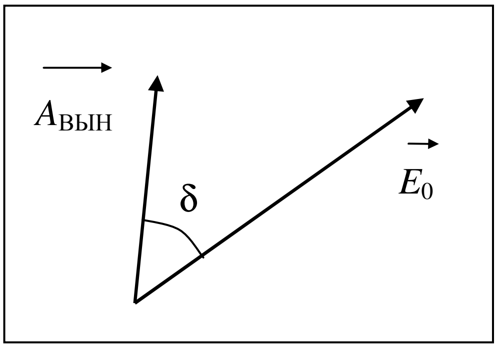
Замечание. Зная какое-либо решение для переменной *s*, можно найти решение и для переменной *y* из дифференциального уравнения $\dot{y}-\alpha y=s$.

Например, для вынужденных колебаний $\dot{y}-\alpha y = A_{ВЫН}\, sin\left(\omega_{ВЫН}t+\varphi_{ВЫН}\right)$

решение имеет вид $y = A_{ВЫН}\, sin\left(\omega_{ВЫН}t+\varphi_{ВЫН}+\psi\right)$,

где $tg\psi = \dfrac{\omega_{ВЫН}}{\alpha}$. Таким образом, амплитуда пространственных колебаний такая же как и амплитуда колебаний величины s. Поэтому эта амплитуда равна

$$A_{ВЫН} = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_{ВЫН}^2\right)^2+4\beta^2\omega_{ВЫН}^2}},\ \text{где}\ f_0 = \frac{q}{\eta}E_0.$$



Фаза вынужденных колебаний отличается фазы вынуждающей силы на величину θ, где

$$tg\theta = \frac{2\beta\omega_{ВЫН}}{\omega_0^2-\omega_{ВЫН}{}^2},$$

поэтому общая величина сдвига фазы $\delta = \theta+\psi$.

На амплитудно-векторной диаграмме видно, что проекция вектора амплитуды вынужденных колебаний $\vec{A}_{ВЫН}$ на направление вектора амплитуды напряженности электрического поля волны $\vec{E}_0$ равна

$$\left(A_{ВЫН}\right)_{E_0} = A_{ВЫН}\, cos(\delta)$$

В зависимости от частоты эта проекция может как положительной, так и отрицательной, так как $\delta = \theta+\psi$ тоже зависит от частоты.

При колебаниях электроны движутся с ускорением, поэтому излучают электромагнитные волны такой же частоты, что и частота падающей волны. Мощность излучения пропорциональна квадрату ускорения. При колебаниях амплитуда ускорения равна $a_{MAX} = A\omega^2$. Следовательно, мощность излучения электронов под действием падающей волны пропорциональна 4й степени частоты волны. Это излучение называется *рассеянным излучением*.

Атомы (и молекулы) вещества могут тоже совершать колебания под действием падающей волны. Кинетическая энергия колебаний пропорциональная квадрату скорости $v_{MAX} = \omega A$, т.е. квадрату частоты колебаний. Увеличение кинетической энергии колебаний приводит к увеличению внутренней энергии тела. Таким образом, часть энергии волны *поглощается веществом*.

Закон Бугера.

При рассеянии и поглощении энергия падающей волны уменьшается. При прохождении волной расстояния dl интенсивность I уменьшается на величину dI. Введём коэффициент пропорциональности k, называемый *коэффициентом поглощения* (единицы измерения 1/м)

$$dI = -k \cdot I \cdot dl .$$

Откуда получаем закон уменьшения интенсивности (*закон Бугера*)

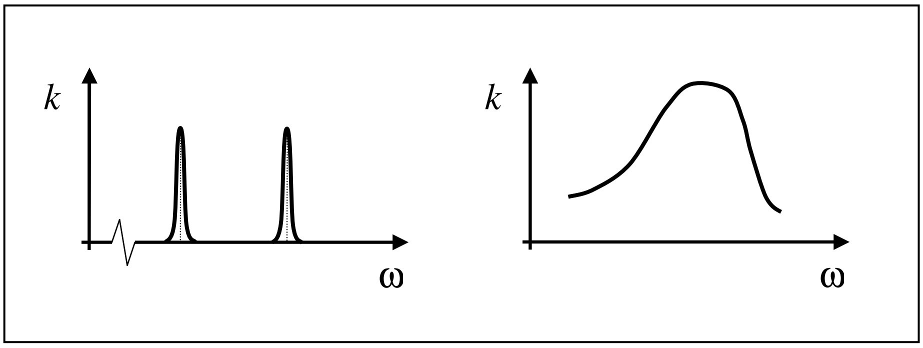
$$I = I_0 e^{-kl}$$

где I_0 – величина интенсивности при l=0. При прохождении расстояния, величина которого обратная коэффициенту поглощения, интенсивность излучения уменьшается в e раз.

Так как причиной появления рассеянного излучения и поглощения энергии являются вынужденные колебания электронов и атомов, и вблизи резонансных частот должно наблюдаться резкое увеличение амплитуды колебаний, то коэффициент поглощения k зависит от частоты излучения. Таких частот, вообще говоря, может быть несколько.

Для веществ, атомы которых слабо взаимодействуют между собой (газы при невысоких давлениях) коэффициент поглощения заметно отличен от нуля только вблизи резонансных частот поглощения (линейчатый спектр поглощения).

Например, результаты опытов показывают, что спектр солнечного излучения непрерывный. Но при прохождении солнечного света через атмосферу Солнца по-



глощается часть излучения при резонансных частотах, соответствующих газам, находящихся в составе атмосферы Солнца. Изучая эти частоты, можно определить химический состав атмосферы Солнца (или звёзд).

Для газов при высоких давлениях, жидкостей и твердых тел характерны широкие полосы поглощения.

Дисперсия.

Рассмотрим вещества, не являющиеся проводниками (или плазмой). В таких телах, когда внешнее поле отсутствует $\vec{E}_{ВНЕШН} = \vec{0}$, усредненноё положение электрических зарядов является равновесным. Под воздействием внешнего электрического поля более лёгкие электроны смещаются и начинают совершать колебания около положения равновесия. При смещении отрицательно заряженного электрона на вектор $\vec{y}$, электрический дипольный момент, равный $\vec{p} = q \cdot \vec{y}$, будет направлен противоположно смещению $\vec{p} = \uparrow\downarrow \vec{y}$. Но из выражения для вектора поляризованности вещества $\vec{P} = æ\vec{E}$ следует, что для определения коэффициента поляризуемости вещества æ надо рассматривать только проекцию вектора поляризованности $\vec{P}$ на направление вектора $\vec{E}$:

$æ = \frac{P_E}{E}$. Но $\vec{P} = \frac{\sum_V \vec{p}}{V} = \frac{N}{V}\vec{p} = n_{ОБ}\vec{p} = n_{ОБ}q\vec{y}$, $æ = \frac{n_{ОБ}qy}{E} = \frac{n_{ОБ}qA_{ВЫН}\cos\delta}{E_0}$,

т.е. $æ = \frac{n_{ОБ}qA_{ВЫН}\cos\delta}{E_0} = \frac{n_{ОБ}q^2\cos\delta}{\eta\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_{ВЫН}^2\right)^2 + 4\beta^2\omega_{ВЫН}^2}}$

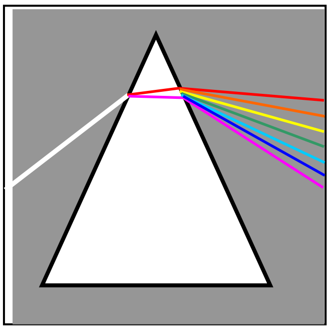
(здесь $n_{ОБ}$ - концентрация диполей).

Показатель преломления вещества равен $n = \sqrt{\mu\varepsilon}$. Большинство оптически прозрачных веществ являются парамагнетиками ($\mu \approx 1$), поэтому

$$n^2 \approx \varepsilon = 1 + æ = 1 + \frac{n_{ОБ}q^2\cos\delta}{\eta\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_{ВЫН}^2\right)^2 + 4\beta^2\omega_{ВЫН}^2}}.$$

Это формула получена с помощью классического рассмотрения при различных предположениях. Но она даёт качественно верное представление о явлениях при взаимодействии излучения с веществом. В зависимости от частоты и величины $\cos\delta$ показатель преломления может быть как больше, так и меньше 1.

Явление зависимости показателя преломления вещества от длины волны излучения называется *дисперсией*. *Нормальная дисперсия* – показатель преломления увеличивается при уменьшении длины волны (увеличении частоты).

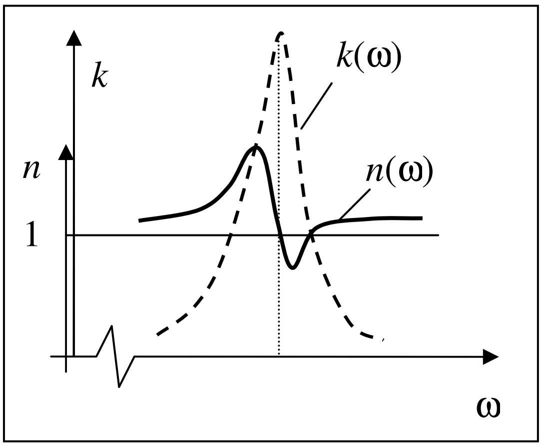


Обратная зависимость носит название *аномальной дисперсии*.

Нормальная дисперсия наблюдается, в частности, в опыте Ньютона по разложению белого света в спектр при прохождении его через стеклянную призму. В этом опыте у красного света, имеющего бóльшую длину волны, меньший показатель преломления, чем у фиолетового, длина волны которого меньше.

Аномальная дисперсия в веществе наблюдается в области частот, соответствующих сильному поглощению. Действительно, качественно это можно наблюдать на классической модели рассмотренной выше.

Величина показателя преломления $n \approx \sqrt{1+\dfrac{n_{OБ}q^2 \cos\delta}{\eta\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_{ВЫН}^2\right)^2+4\beta^2\omega_{ВЫН}^2}}}$ зависит от частоты волны. Если частота сильно отличается от резонансной, то сдвиг фаз δ незначительный ($\cos\delta \approx 1$), поэтому значение дроби положительное и показатель преломления больше единицы.



Вблизи резонансной частоты величин дроби начинает резко возрастать, поэтому при $\cos\delta > 0$ показатель n увеличивается. Но при некоторой частоте величина $\cos\delta$ становится отрицательной, что приводит к резкому уменьшению показателя преломления.

Если совместить два графика – зависимость коэффициента поглощения и показателя преломления от частоты, то можно увидеть, что аномальная дисперсия в веществе наблюдается в области частот, соответствующих сильному поглощению. Аномальную дисперсию можно наблюдать, например, в разреженных газах и парах металлов.

Групповая скорость.

Электромагнитные волны, испущенные естественными источниками, не являются монохроматичными, но их можно представить в виде волнового пакета – как суперпозицию монохроматичных волн с близкими частотами. Из-за дисперсии монохроматичные волны, составляющие пакет, будут иметь разные фазовые скорости в веществе. Если вещество является *сильно диспергирующим*, т.е. показатель преломления сильно меняется даже при небольшом изменении частоты, то разные фазовые скорости волн будут являться причиной распадения пакета – отдельные значительно волны обгонят другие.

Если волновой пакет распространяется в слабо диспергирующей среде, то он будет сохранять целостность длительное время, хотя его «форма» будет меняться. *Пример*. Рассмотрим плоскую электромагнитную волну, являющуюся суперпозицией двух монохроматических волн с близкими частотами ω и $\omega+\Delta\omega$, $\Delta\omega<<\omega$ и распространяющуюся в веществе. Частоты волн разные, поэтому им соответствуют разные показатели преломления n и $n+\Delta n$, где $\Delta n=\frac{dn}{d\omega}\Delta\omega$. Поэтому волны имеют разные фазовые скорости $v_\Phi(\omega)=\frac{c}{n(\omega)}$. Предполагаем, что вещество является слабо диспергирующим при данной частоте: $\frac{\Delta n}{n}=\frac{dn}{d\omega}\frac{\Delta\omega}{n}<<1$, т.е. если даже частота изменится в несколько раз $\Delta\omega=N\omega$, то изменение показателя преломления будет малым $\frac{\Delta n}{n}=\frac{dn}{d\omega}\frac{\omega}{n}N<<1$. Демонстрацией этого понятия является дисперсия белого света в опыте Ньютона. Хотя частота фиолетового света практически в два раза больше частоты красного света, но относительное изменение показателя преломления среды невелико.

Уравнение плоской волны, которая движется вдоль оси X: $A=A_0\cos(\omega t-kx)$. (В качестве величины А можно взять либо E либо H). Но $k=\frac{\omega}{v_\Phi}=\frac{\omega}{c}n$, поэтому уравнения волн можно записать в виде $A_1=A_0\cos\left(\omega t-\frac{\omega n}{c}x\right)$,

$$A_2=A_0\cos\left((\omega+\Delta\omega)t-\frac{(\omega+\Delta\omega)\left(n+\frac{dn}{d\omega}\Delta\omega\right)}{c}x\right)=A_0\cos\left((\omega+\Delta\omega)t-\frac{\omega n+\left(\omega\frac{dn}{d\omega}+n\right)\Delta\omega+\frac{dn}{d\omega}(\Delta\omega)^2}{c}x\right)$$

Отбросим величину $\frac{dn}{d\omega}(\Delta\omega)^2$, считая её малой, и найдём суперпозицию волн

$$A_\Sigma = A_1 + A_2 = A_0\,cos\left(\omega t - \frac{\omega n}{c}x\right) + A_0\,cos\left(\omega t - \frac{\omega n + \left(\omega\frac{dn}{d\omega} + n\right)\Delta\omega}{c}x\right)$$

$$A_\Sigma = 2A_0\,cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\left(\omega\frac{dn}{d\omega} + n\right)\Delta\omega}{2c}x\right)cos\left(\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t - \frac{\omega n + \left(\omega\frac{dn}{d\omega} + n\right)\frac{\Delta\omega}{2}}{c}x\right)$$

Мы получили уравнение, описывающее в каждой фиксированной точке оси X биения. Эти биения тоже распространяются вдоль оси X. Можно считать, что величина амплитуды $2A_0$ биений является плоской волной

$A_Б = 2A_0\,cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\left(\omega\frac{dn}{d\omega} + n\right)\Delta\omega}{2c}x\right)$, движущейся вдоль оси с фазовой скоростью

$v_{ГР} = \dfrac{\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)}{\left(\frac{\left(\omega\frac{dn}{d\omega} + n\right)\Delta\omega}{2c}\right)} = \dfrac{c}{\omega\frac{dn}{d\omega} + n}$. Эта скорость является *характеристикой группы* волн, одновременно распространяющих в одной области пространства, поэтому её принято называть *групповой скоростью*. Учитывая условие слабой дисперсии $\frac{dn}{d\omega}\frac{\omega}{n} << 1$, получаем $v_{ГР} = \dfrac{c}{\omega\frac{dn}{d\omega} + n} = \dfrac{c}{n\left(1 + \frac{\omega}{n}\frac{dn}{d\omega}\right)} = \frac{c}{n}\left(1 - \frac{\omega}{n}\frac{dn}{d\omega} + ...\right) \approx \frac{c}{n} - \frac{c}{n}\frac{\omega}{n}\frac{dn}{d\omega} = v - v\frac{\omega}{n}\frac{dn}{d\omega}$.

(Здесь использована формула для суммы бесконечной геометрической прогрессии с малым показателем и определение фазовой скорости $v = \frac{c}{n}$.)

Так как $\frac{dv}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\left(\frac{c}{n}\right) = -c\frac{1}{n^2}\frac{dn}{d\omega} = -\frac{c}{n}\frac{1}{n}\frac{dn}{d\omega} = -\frac{v}{n}\frac{dn}{d\omega}$, то $v_{ГР} = v - \omega\frac{v}{n}\frac{dn}{d\omega} = v + \omega\frac{dv}{d\omega}$.

Перейдём в этом выражении от циклической частоты ω к длине волны λ.

Т.к. $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi v}{\lambda}$, то при фиксированной скорости v $d\omega = -\frac{2\pi v}{\lambda^2}d\lambda$, поэтому

$$v_{ГР} = v + \frac{2\pi v}{\lambda}\frac{dv}{\left(-\frac{2\pi v}{\lambda^2}d\lambda\right)} = v - \frac{2\pi v\lambda^2}{\lambda}\frac{dv}{2\pi v d\lambda} = v - \lambda\frac{dv}{d\lambda}.♣$$

Итак, групповая скорость группы волн, одновременно распространяющихся в одной области пространства (волнового пакета), связана с фазовой скоростью волн формулой Рэлея $\boxed{v_{ГР} = v - \lambda\frac{dv}{d\lambda}}$. В веществе электромагнитный сигнал распространяется именно с групповой скоростью.

При аномальной дисперсии показатель преломления среды уменьшается с увеличением частоты, т.е. с уменьшением длины волны. Поэтому фазовая скорость с уменьшением длины волны тоже уменьшается, следовательно $\frac{dv}{d\lambda} > 0$. В случае, когда $n < 1$ фазовая скорость становится больше чем скорость в вакууме $v = \frac{c}{n} > c$, но групповая скорость $v_{ГР} = v - \lambda\frac{dv}{d\lambda} < c$, поэтому противоречия с СТО нет.

Замечание. Опыт показывает, что если средой является металл или плазма, то существует определенная частота ω_P, называемая *плазменной частотой*, такая, что электромагнитные волны с меньшей частотой $\omega<\omega_P$ полностью отражаются от тела, для волн с большей частотой $\omega>\omega_P$ металл или плазма являются полностью прозрачными.

Например, очень тонкий слой золота, нанесённый напылением на поверхность стекла, пропускает видимый свет полностью, а инфракрасное излучение не проходит.

Расчёты показывают, что величина критической частоты ω_P зависит от концентрации заряженных частиц.

Верхние слои атмосферы Земли представляют собой ионизированную плазму и образуют *ионосферу*. (Ионизация происходит под действием солнечных и космических лучей.). Опыт показывает, что радиоволны длиной более 10 метров полностью отражаются от ионосферы, что широко используется в радиосвязи.
Волны меньшей длины волны, наоборот, свободно проходят сквозь ионосферу.