Лекция 14-15. Электромагнитные волны.

Волновое уравнение для электромагнитного поля, его общее решение. Распространения электромагнитных волн. Энергия и импульс электромагнитного поля. Вектор Пойнтинга. Теорема Пойнтинга.

Рассмотрим уравнения Максвелла в вакууме, в условиях отсутствия зарядов и токов. При ρ=0, $\vec{j}=\vec{0}$, ε=1, μ=1 уравнения в дифференциальной форме примут вид

$$div\vec{D}=0,\ rot\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$

$$div\vec{B}=0,\ rot\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}.$$

Учитываем материальные уравнения $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}$, $\vec{B}=\mu_0\vec{H}$ и получаем систему уравнений

$$div\left(\vec{E}\right)=0 \qquad (1)$$

$$rot\vec{E}=-\mu_0\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \qquad (2)$$

$$div\left(\vec{H}\right)=0 \qquad (3)$$

$$rot\vec{H}=\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad (4)$$

Начинаем преобразования уравнений (2) и (4): $\frac{\partial}{\partial t}\left(rot\vec{E}\right)=-\mu_0\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}$, откуда

$$rot\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)=-\mu_0\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} \qquad (5)$$

Т.к. из (4) следует, что $\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\frac{1}{\varepsilon_0}rot\vec{H}$, то равенство (5) примет вид $rot\left(\frac{1}{\varepsilon_0}rot\vec{H}\right)=-\mu_0\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}$ или

$$rot\left(rot\vec{H}\right)=-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} \qquad (6)$$

Но, как известно из лекции № 13 $rot\left(rot\left(\vec{H}\right)\right)=grad\left(div\left(\vec{H}\right)\right)-\Delta\vec{H}$, поэтому с учётом (3), уравнение (6) равносильно уравнению

$$\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\Delta\vec{H}=\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} \qquad (7)$$

Аналогичные преобразования можно провести для вектора $\vec{E}$: из (2) следует $\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}=-\frac{1}{\mu_0}rot\vec{E}$,

enlib.ru

из (4) следует $\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(rot\left(\vec{H}\right)\right) = rot\left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right) = rot\left(-\frac{1}{\mu_0} rot\vec{E}\right) = -\frac{1}{\mu_0} rot\left(rot\vec{E}\right)$,

Учитывая (1), получаем $rot\left(rot\left(\vec{E}\right)\right) = grad\left(div\left(\vec{E}\right)\right) - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E}$, поэтому

$$\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\Delta\vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \qquad (8)$$

Полученные уравнения (7) и (8) имеют вид волнового уравнения – они описывают распространение плоских *электромагнитных* волн. Сразу можно сказать, что *фазовая скорость электромагнитной* волны в вакууме равна $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \approx 3\cdot 10^8$ м/с и совпадает со значением скорости света в вакууме.

При распространении электромагнитных волн в среде с постоянными значениями ε и μ, выражение для фазовой скорости примет вид $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{n}$, где величина $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ называется *показателем преломления* среды.

Замечание. Предположение о постоянстве значений ε и μ приводит к расхождению с опытными значениями показателя преломления. Например, для воды ε≈81 и μ≈1, что даёт значение расчётное *n*≈9. Однако, экспериментально определено значение *n*≈1,5. Несовпадение объясняется возможной зависимостью ε и μ от частоты и других параметров волны.

Волновое уравнение является линейным, в том смысле, что любая линейная комбинация решений тоже является решением. Отсюда, как известно из предыдущего семестра, следует принцип *суперпозиции для волновых полей* – наложение волновых полей является волновым полем. Поэтому выделяют «простейшие» волновые поля – поля (или волны), соответствующие определённым частотам. Такие «простейшие» волны, определенная частота которых постоянная, называются *монохроматическими*.

Пример. Электромагнитная волна, частоты колебаний векторов в которой равны 1000 Гц и 2000 Гц является суперпозицией двух *монохроматических волн* с частотами 1000 Гц и 2000 Гц.♣

В декартовых координатах волновые уравнения (7) и (8) имеют вид

$$\begin{cases} v^2\left(\frac{\partial^2 H_X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_X}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial^2 H_X}{\partial t^2} \\ v^2\left(\frac{\partial^2 H_Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_Y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_Y}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial^2 H_Y}{\partial t^2} \\ v^2\left(\frac{\partial^2 H_Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_Z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_Z}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial^2 H_Z}{\partial t^2} \end{cases}, \quad \begin{cases} v^2\left(\frac{\partial^2 E_X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_X}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial^2 E_X}{\partial t^2} \\ v^2\left(\frac{\partial^2 E_Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_Y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_Y}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial^2 E_Y}{\partial t^2} \\ v^2\left(\frac{\partial^2 E_Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_Z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_Z}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial^2 E_Z}{\partial t^2} \end{cases}$$

enlib.ru

Эти уравнения описывают распространение плоских волн. Пример записи решения для первых уравнений каждой из систем

$$H_X = H_{0X}\, sin\left(\omega_H t \mp \left(\vec{k}_H, \vec{r}\right) + \alpha_H\right),\ E_X = E_{0X}\, sin\left(\omega_E t \mp \left(\vec{k}_E, \vec{r}\right) + \beta_H\right)$$

(индекс «*E*» соответствует параметрам напряженности электрического поля, а «*H*» - магнитного) где в соответствующей волне $\left(\vec{k}, \vec{r}\right) = k_x x + k_y y + k_z z$, $\vec{r} = (x, y, z)$ радиус-вектор точки, где находится волна, а для координат волнового вектора $\vec{k} = \left(k_x, k_y, k_z\right)$ справедливо соотношение

$$k := \left|\vec{k}\right| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \frac{\omega}{v}.$$

Знак «-» соответствует «убегающей» волне, а знак «+» - набегающей.

Обратим внимание на тот факт, что волновые уравнения для каждой из координат векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ независимы друг от друга, поэтому общее решение можно рассматривать как суперпозицию решений для координат векторов.

При этом решения волновых уравнений согласованы. Т.е. определённому решению одного из волновых уравнений для какой-то координаты вектора напряжённости электрического поля соответствует определённое решение одного из волновых уравнений для координат вектора напряжённости магнитного поля, и наоборот.

Поэтому можно искать решения, соответствующие, например, вектору $\vec{E} = \left(E_X, E_Y, E_Z\right)$. Но согласно принципу суперпозиции волновых полей, решение, соответствующее вектору $\vec{E} = \left(E_X, E_Y, E_Z\right)$ можно найти как суперпозицию решений, соответствующих векторам $\vec{E}_1 = \left(E_X, 0, 0\right)$, $\vec{E}_2 = \left(0, E_Y, 0\right)$, $\vec{E}_3 = \left(0, 0, E_Z\right)$.

Аналогично, можно искать решения по вектору напряжённости магнитного поля $\vec{H} = \left(H_X, H_Y, H_Z\right)$.

Пример. Найдем решения для случая, когда волна движется вдоль оси z, а вектор напряжённости электрического поля имеет координаты $\vec{E} = \left(E_X, 0, E_Z\right)$, зависящие только от z. Волна в этом случае является суперпозицией волновых полей векторов $\vec{E}_1 = \left(E_X, 0, 0\right)$ и $\vec{E}_3 = \left(0, 0, E_Z\right)$. Система волновых уравнений в декартовых координатах примет вид

$$\begin{cases} v^2 \dfrac{\partial^2 E_X}{\partial z^2} = \dfrac{\partial^2 E_X}{\partial t^2} \\ v^2 \dfrac{\partial^2 E_Z}{\partial z^2} = \dfrac{\partial^2 E_Z}{\partial t^2} \end{cases}$$

Так как ищем решения в виде волны, то будем предполагать, что в рассматриваемой области нет постоянных во времени электрического и магнитного полей. Т.е. если при решении

enlib.ru

получается постоянное значение какой-то координаты векторов $\vec{E}$ или $\vec{H}$, то это значение можно считать равным нулю.

Уравнение (1) $div\left(\vec{E}\right)=0$ примет вид $\frac{\partial E_Z}{\partial z}=0$, откуда E_Z не зависит от координат, но, возможно, зависит от времени. Но эта координата должна также удовлетворять волновому уравнению $v^2\frac{\partial^2 E_Z}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 E_Z}{\partial t^2}$. Поэтому $E_Z=const$ - т.е. поле постоянное, откуда $E_Z=0$.

Из уравнения (2) $rot\vec{E}=-\mu_0\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$, с учётом $E_Z=0$

$$\begin{vmatrix}\vec{e}_X & \vec{e}_Y & \vec{e}_Z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ E_X & 0 & 0\end{vmatrix}=-\mu_0\left(\frac{\partial H_X}{\partial t}\vec{e}_X+\frac{\partial H_Y}{\partial t}\vec{e}_Y+\frac{\partial H_Z}{\partial t}\vec{e}_Z\right)$$

остаются равенства

$$\frac{\partial H_X}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial E_X}{\partial z}=-\mu_0\frac{\partial H_Y}{\partial t},\quad \frac{\partial E_X}{\partial y}=-\mu_0\frac{\partial H_Z}{\partial t}.$$

Координата H_X не зависит от времени, но, так как она должна являться решением волнового уравнения

$$v^2\left(\frac{\partial^2 H_X}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_X}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 H_X}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial^2 H_X}{\partial t^2},$$

то $H_X=const$, поэтому $H_X=0$.

Искомые координаты векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ зависят только от z, следовательно, должно быть $\frac{\partial E_X}{\partial y}=0$, поэтому из третьего равенства следует $\frac{\partial H_Z}{\partial t}=0$ и, по аналогии, $H_Z=0$

Уравнение (3) $div\left(\vec{H}\right)=0$ примет вид $\frac{\partial H_Y}{\partial y}=0$. Уравнение (4) $rot\vec{H}=\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

$$\begin{vmatrix}\vec{e}_X & \vec{e}_Y & \vec{e}_Z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & H_Y & 0\end{vmatrix}=\varepsilon_0\frac{\partial E_X}{\partial t}\vec{e}_X$$

даёт соотношение $-\frac{\partial H_Y}{\partial z}=\varepsilon_0\frac{\partial E_X}{\partial t}$. Получаем систему

enlib.ru

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_X}{\partial z} = -\mu_0 \dfrac{\partial H_Y}{\partial t} \\ -\dfrac{\partial H_Y}{\partial z} = \varepsilon_0 \dfrac{\partial E_X}{\partial t} \end{cases},$$

откуда можно опять получить волновые уравнения $v^2 \dfrac{\partial^2 H_Y}{\partial z^2} = \dfrac{\partial^2 H_Y}{\partial t^2}$ и $v^2 \dfrac{\partial^2 E_X}{\partial z^2} = \dfrac{\partial^2 E_X}{\partial t^2}$.

Следовательно, вектору напряжённости электрического поля $\vec{E}_1 = (E_X, 0, 0)$ соответствует вектор напряженности магнитного поля $\vec{H}_2 = (0, H_Y, 0)$.

Поэтому вектору $\vec{E}_2 = (0, E_Y, 0)$ будет соответствовать вектор $\vec{H}_1 = (H_X, 0, 0)$.

Но векторам $\vec{E}_3 = (0, 0, E_Z)$ и $\vec{H}_3 = (0, 0, H_Z)$ не соответствует никакая *плоская* электромагнитная волна, распространяющая вдоль оси Z

Заключение по результатам примера.

1) *Плоская электромагнитная волна является поперечной.*

Действительно, из примера следует, что продольные составляющие (вдоль направления движения волны - оси Z) векторов напряжённостей электрического и магнитного полей равны нулю $E_Z = 0$ и $H_Z = 0$.

Векторы $\vec{E} = (E_X, 0, 0)$ и $\vec{H} = (0, H_Y, 0)$ направлены перпендикулярно друг другу и перпендикулярно направлению движения волны. Если направление движения волны вдоль оси Z задать волновым вектором $\vec{k} = (0, 0, k)$, то можно сказать что тройка векторов $(\vec{E}, \vec{H}, \vec{k})$ является *правой*.

2) *Колебания напряженностей электрического и магнитного полей в любой точке плоской волны происходят с одинаковой фазой.*

Действительно, пусть решения волновых уравнений имеют вид

$$E_X = E_0 \, sin(\omega_E t \mp k_E z + \beta_E), \; H_Y = H_0 \, sin(\omega_H t \mp k_H z + \alpha_H).$$

Тогда, например, из равенства $\dfrac{\partial E_X}{\partial z} = -\mu_0 \dfrac{\partial H_Y}{\partial t}$ следует, что

$$\mp k_E E_0 \, cos(\omega_E t \mp k_E z + \beta_E) = -\mu_0 \omega_H H_0 \, cos(\omega_H t \mp k_H z + \alpha_H)$$

Это равенство возможно, только если фазы волн равны с точностью до π.

enlib.ru

Откуда $\omega_E = \omega_H$, т.е. колебания происходят с одинаковой частотой, и, так как фазовые скорости одинаковые, то равны и волновые числа $k_E = k_H$.

Из равенства амплитуд $k_E E_0 = \mu_0 \omega_H H_0$ следует соотношение $H_0 = \frac{k_E}{\mu_0} E_0 = \frac{\omega_E}{\omega_H} \frac{1}{\mu_0 v} E_0$. Но фазовая скорость волны (в вакууме) $v = c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$, поэтому $H_0 = \frac{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}{\mu_0} E_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0$.

При распространении плоской электромагнитной волны в среде с постоянными значениями ε *и* μ*, величины напряженностей магнитного и электрического полей связаны соотношением*

$$H = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} E .$$

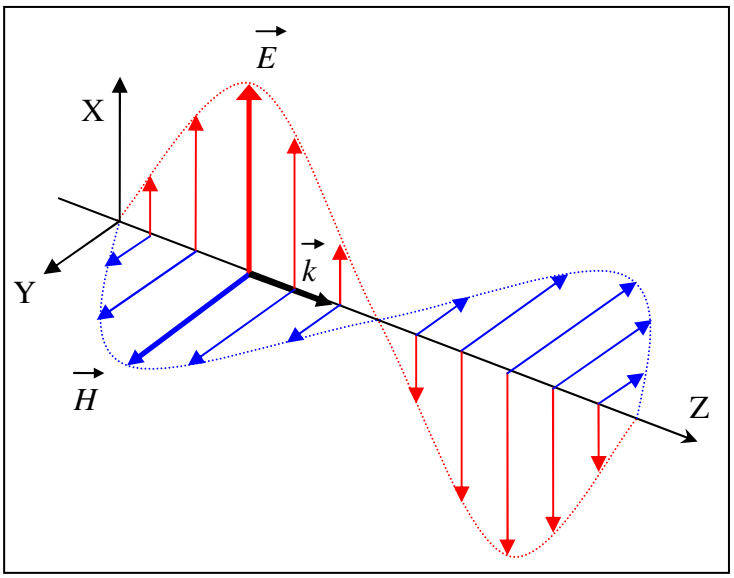
Отношение амплитуд напряжённостей электрического и магнитного полей называется *волновым сопротивлением среды* $Z_0 = \frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}$. Единица измерения Ом.

Для вакуума (ε=1, μ=1) $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \approx \sqrt{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 36\pi \cdot 10^{9}} = 120\pi \approx 377$ Ом.

Объёмная плотность энергии в плоской волне сумме объёмных плотностей энергии электрического и магнитного полей

$$w = w_Э + w_M .$$

Из соотношения амплитуд следует, что объёмные плотности энергии электрического и магнитного полей в плоской волне равны друг другу. Действительно,



enlib.ru

$$w_M = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \frac{\mu\mu_0}{2}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}E\right)^2 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = w_Э .$$

Таким образом, энергия плоской волны равномерно распределена на электрическую и магнитную части. По аналогии с МКТ, иногда говорят, что плоская электромагнитная волна обладает двумя степенями свободы.

Поэтому $w = w_Э + w_M = \mu\mu_0 H^2 = \varepsilon\varepsilon_0 E^2$. Или

$$w = \varepsilon\varepsilon_0 E_0^2 \, sin^2\left(\omega t \mp kz + \alpha\right) = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E_0^2}{2}\left(1 - cos\left(2\left(\omega t \mp kz + \alpha\right)\right)\right),$$

объёмная плотность энергии в плоской электромагнитной волне тоже является плоской волной, но с удвоенной частотой. Фазовая скорость волны энергии равна $v_Э = \frac{\omega_Э}{k_Э} = \frac{2\omega}{2k} = v$ фазовой скорости электромагнитной волны.

Средняя плотность энергии, переносимая плоской электромагнитной волной

$$< w >= \frac{1}{2}\mu\mu_0 H_0^2 = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E_0^2 .$$

Изменение объёмной плотности энергии электромагнитного поля в данной точке

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \varepsilon\varepsilon_0\left(\vec{E}, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) + \mu\mu_0\left(\vec{H}, \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right).$$

Воспользуемся уравнениями Максвелла

$$rot\left(\vec{E}\right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad rot\left(\vec{H}\right) = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j} + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Откуда

$$\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -rot\left(\vec{E}\right), \; \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = rot\left(\vec{H}\right) - \vec{j} .$$

Тогда

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \left(\vec{E}, \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) + \left(\vec{H}, \mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right) = \left(\vec{E}, \left(rot\left(\vec{H}\right) - \vec{j}\right)\right) - \left(\vec{H}, rot\left(\vec{E}\right)\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \left(\vec{E}, rot\left(\vec{H}\right)\right) - \left(\vec{H}, rot\left(\vec{E}\right)\right) - \left(\vec{E}, \vec{j}\right).$$

Используем оператор «набла»:

$$\left(\vec{E}, rot\left(\vec{H}\right)\right) - \left(\vec{H}, rot\left(\vec{E}\right)\right) = \left(\vec{E}, \left(\vec{\nabla} \times \vec{H}\right)\right) - \left(\vec{H}, \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right)\right)$$

Т.к. оператор «набла» - это оператор дифференцирования и для любого произведения

$\vec{\nabla}\left(f \cdot g\right) = g \cdot \vec{\nabla}\left(f\right) + f \cdot \vec{\nabla}\left(g\right)$,

enlib.ru

$$\text{то } \left(\vec{\nabla},\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)\right)=-\left(\vec{E},\left(\vec{\nabla}\times\vec{H}\right)\right)+\left(\vec{H},\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)\right),$$

т.е.

$$\left(\vec{E},rot\left(\vec{H}\right)\right)-\left(\vec{H},rot\left(\vec{E}\right)\right)=-div\left(\vec{E}\times\vec{H}\right).$$

Поэтому

$$\frac{\partial w}{\partial t}=-div\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)-\left(\vec{E},\vec{j}\right).$$

Проинтегрируем это выражение по объёму некоторой области V, в которой есть электромагнитное поле:

$$-\iiint\limits_V \frac{\partial w}{\partial t}dV=\iiint\limits_V div\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)dV+\iiint\limits_V\left(\vec{E},\vec{j}\right)dV$$

Если область не движется, то $\iiint\limits_V \frac{\partial w}{\partial t}dV=\frac{d}{dt}\iiint\limits_V wdV=\frac{dW}{dt}$, где $W=\iiint\limits_V wdV$ энергия электромагнитного поля в области *V*.

По закону Ома $\vec{j}=\gamma\vec{E}$ или $\vec{E}=\rho\vec{j}$, где $\rho=\frac{1}{\gamma}$ - удельное сопротивление среды. Поэтому выражение $\left(\vec{E},\vec{j}\right)=\left(\rho\vec{j},\vec{j}\right)=\rho j^2$ - это дифференциальная форма закона Джоуля-Ленца. Тогда

$$\iiint\limits_V\left(\vec{E},\vec{j}\right)dV=\iiint\limits_V \rho j^2dV=\frac{dQ}{dt}$$

- мощность выделения теплоты (по закону Джоуля-Ленца) в области V.

По теореме Остроградского-Гаусса $\iiint\limits_V div\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)dV=\oiint\limits_S\left(\left(\vec{E}\times\vec{H}\right),d\vec{S}\right)$,

где *S* – ориентированная наружу поверхность, являющаяся границей области V.

Вектор $\vec{\Pi}=\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)$ (П - буква «пи») называется *вектором Пойнтинга* (Джон Генри Пойнтинг - британский физик (1852 - 1914)). Окончательно получим равенство, называемое <u>теоремой Пойнтинга</u>

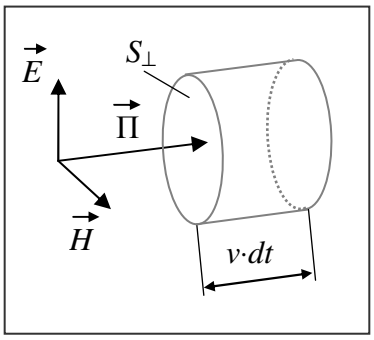
$$-\frac{dW}{dt}=\oiint\limits_S\left(\vec{\Pi},d\vec{S}\right)+\frac{dQ}{dt}.$$

Скорость изменения энергии электромагнитного поля в некоторой области равна, с обратным знаком, сумме мощности выделения теплоты (по закону Джоуля-Ленца) и потока вектора Пойнтинга через границу области, ориентированную наружу.

enlib.ru

Если в области нет тепловыделения $\frac{dQ}{dt}=0$, то в случае, когда векторное поле $\vec{\Pi}$ на границе S направлено внутрь области поток отрицателен $\oiint_S \left(\vec{\Pi}, d\vec{S}\right)<0$, а $\frac{dW}{dt}>0$ - энергия области увеличивается. И наоборот, если поток вектора Пойнтинга направлен наружу из области V, т.е. $\oiint_S \left(\vec{\Pi}, d\vec{S}\right)>0$, то $\frac{dW}{dt}<0$ - энергия в области убывает.

Рассмотрим область, в которой распространяется плоская электромагнитная волна.



Предположим, что в области нет выделения теплоты по закону Джоуля-Ленца. Выделим в области *малую* площадку $S_\perp$, перпендикулярную вектору Пойнтинга и найдём поток вектор Пойнтинга через эту площадку за малое время dt. Так как скорость волны объёмной плотности энергии равна фазовой скорости электромагнитной волны v, то количество энергии, прошедшей через площадку равно энергии в объёме прямого цилиндра с площадью основания $S_\perp$ и высотой vdt:

$$\oiint_{S_{цил}} \left(\vec{\Pi}, d\vec{S}\right) = -\frac{dW}{dt} = -\frac{wdV}{dt} = -\frac{wS_\perp vdt}{dt} = -wvS_\perp$$

Поверхность цилиндра ориентирована наружу, а вектор Пойнтинга направлен внутрь цилиндра, поэтому $\oiint_{S_{цил}} \left(\vec{\Pi}, d\vec{S}\right) = -\Pi S_\perp$. Тогда из равенства $-\Pi S_\perp = -wvS_\perp$ следует $\Pi = wv$. В векторном виде можно записать равенство

$$\vec{\Pi} = w\vec{v}\,.$$

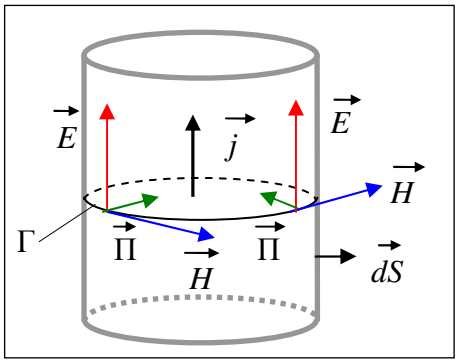
(Из этой формулы следует, что вектор Пойнтинга направлен по движению волны.)

Следовательно, вектор Пойнтинга – это вектор Умова-Пойнтинга, соответствующий электромагнитной волне. Поэтому физический смысл вектора Пойнтинга состоит в том, что он указывает направление потока энергии, а его величина равна плотности мощности потока энергии.

Пример. Рассмотрим часть цилиндрического проводника длиной l и площадью поперечного сечения $S_\perp$, по которой протекает постоянный электрический ток. Предположим, что величина плотности тока $\vec{j}$ постоянна в сечении проводника, поэтому сила тока равна

$$I = jS_\perp\,.$$

enlib.ru



По закону Ома $\vec{j} = \gamma\vec{E} = \frac{1}{\rho}\vec{E}$, где ρ - удельное сопротивление проводника. На поверхности проводника вектор $\vec{H}$ направлен по касательной к силовой линии Г, а его величина

$$H = \frac{I}{2\pi r},$$

где r – радиус проводника. Направления $\vec{H}$ и $\vec{j}$ согласованы правилом буравчика, и направлены перпендикулярно друг другу, но $\vec{j} \parallel \vec{E}$, поэтому $\vec{H} \perp \vec{E}$. Тогда на поверхности проводника вектор Пойнтинга $\vec{\Pi} = \vec{E} \times \vec{H}$ направлен вглубь проводника, т.е. против вектора $d\vec{S}$. Найдём поток вектора Пойнтинга через (боковую) поверхность проводника.

$$\oiint\limits_{S_{БОКОВ}} \left(\vec{\Pi}, d\vec{S}\right) = -\oiint\limits_{S_{БОКОВ}} \left|\vec{\Pi}\right| dS = -\oiint\limits_{S_{БОКОВ}} EHdS .$$

Здесь учтено, что $\left|\vec{\Pi}\right| = EH\, sin 90^0 = EH$ и что векторы $d\vec{S}$ и $\vec{\Pi}$ направлены противоположно.

Т.к. $E = j\rho = \frac{I}{S_\perp}\rho$, $S_{БОКОВ} = 2\pi rl$, то

$$\oiint\limits_{S_{БОКОВ}} \left(\vec{\Pi}, d\vec{S}\right) = -EH \oiint\limits_{S_{БОКОВ}} dS = -\frac{I}{S_\perp}\rho\frac{I}{2\pi r}2\pi rl = -I^2\rho\frac{l}{S_\perp} = -I^2 R,$$

где $R = \rho\frac{l}{S_\perp}$ электрическое сопротивление проводника. Итак, поток вектора Пойнтинга через боковую поверхность проводника равен по величине мощности тепловыделения в проводнике (по закону Джоуля-Ленца):

$$\oiint\limits_{S_{БОКОВ}} \left(\vec{\Pi}, d\vec{S}\right) = -\frac{dQ}{dt}.$$

Следовательно, $-\frac{dW}{dt} = \oiint\limits_{S} \left(\vec{\Pi}, d\vec{S}\right) + \frac{dQ}{dt} = 0$ - энергия электромагнитного поля в проводнике не меняется.♣

Рассмотрим в некоторой инерциальной системе отсчёта плоскую электромагнитную волну, движущуюся вдоль оси Z. Следовательно, вектор Пойнтинга $\vec{\Pi}$ тоже направлен вдоль оси Z. Пусть S_Z - малая площадку, перпендикулярная оси Z (и вектору Пойнтинга). Предположим, что волна полностью поглощается веществом этой площадки. Как известно, в электромагнитном поле на тела действуют силы, создающие давление, равное по величине объёмной плотности энергии $p=w$. Поэтому величина силы, действующей на площадку равна $F=pS_Z$. Вектор этой силы направлен перпендикулярно площадке в направлении движения волны, т.е. вдоль оси Z,

enlib.ru

поэтому можно написать, что $F_Z=pS_Z$. За малый промежуток времени dt импульс этой силы будет равен $F_Z dt = pS_Z dt = \frac{wS_Z vdt}{v} = \frac{dW}{v}$, где $dW = wS_Z vdt$ - величина энергии волны, поглощенной площадкой за время dt, а v – фазовая скорость волны. Импульс силы, действующей на площадку, равен изменению импульса этой площадки вдоль оси Z: $dP_Z = \frac{dW}{v}$.

Если предположить, что импульс площадки до падения на неё электромагнитной волны был равен нулю, то, спустя некоторый промежуток времени, у площадки появится импульс, величина которого прямо пропорциональна величине энергии, поглощенной за этот промежуток времени:

$$P = \frac{W}{v}.$$

Если рассматривать систему волна-площадка как замкнутую, то в этой системе импульс сохраняется, следовательно, изменение импульса площадки равно изменению импульса волны. Таким образом, электромагнитной волне следует приписать величину импульса P, величина которого связана с энергией W, переносимой волной с фазовой скоростью, соотношением

$$P = \frac{W}{v}.$$

Тогда единице объёма волны можно приписать величину удельного импульса

$$P_{УД} = \frac{P}{V} = \frac{W}{vV} = \frac{w}{v}$$

Но из выражения $\vec{\Pi} = w\vec{v}$ следует, что $w = \frac{|\vec{\Pi}|}{v}$. Поэтому единичный объём электромагнитной волны обладает импульсом, величина которого $P_{УД} = \frac{|\vec{\Pi}|}{v^2}$. Поэтому в векторном виде

$$\vec{P}_{УД} = \frac{\vec{\Pi}}{v^2} = \frac{\vec{E} \times \vec{H}}{v^2}.$$

Замечание. Из результатов, полученных в СТО, следует соотношение между энергией W, импульсом P и массой покоя m_0 материальных тел

$$W^2 - P^2c^2 = m_0^2c^4.$$

В вакууме скорость электромагнитной волны равна c, поэтому для импульса и энергии некоторого объёма волны

$$P = \frac{W}{c}.$$

Следовательно, масса покоя электромагнитного поля в этом объёме волны равна нулю $m_0 = 0$.

enlib.ru

За малый промежуток времени dt изменение импульса ориентированной площадки S_Z, полностью поглощающей электромагнитную волну, равно $dP_Z = \frac{dW}{v}$. Но, при отсутствии тепловыделения (по закону Джоуля-Ленца) из теоремы Пойнтинга следует равенство

$$-\frac{dW}{dt} = \oiint_S \left(\vec{\Pi}, d\vec{S}\right).$$

Здесь S – это замкнутая поверхность, внутри которой находится рассматриваемая площадка S_Z. В случае полного поглощения электромагнитной волны вектор Пойнтинга отличен от нуля только на площадке S_Z, поэтому

$$\oiint_S \left(\vec{\Pi}, d\vec{S}\right) = \iint_{S_Z} \left(\vec{\Pi}, d\vec{S}\right).$$

При этом вектор Пойнтинга перпендикулярен к площадке S_Z, т.к. по условию он направлен вдоль оси Z: $\vec{\Pi} = \left(0, 0, \Pi_Z\right)$. Следовательно,

$$\oiint_S \left(\vec{\Pi}, d\vec{S}\right) = \iint_{S_Z} \left(\vec{\Pi}, d\vec{S}\right) = \iint_{S_Z} \Pi_Z \, cos\left(\widehat{\vec{\Pi}, d\vec{S}}\right) dS.$$

Если вектор Пойнтинга представить в виде сумме координатных векторов

$$\vec{\Pi} = \vec{\Pi}_X + \vec{\Pi}_Y + \vec{\Pi}_Z, \text{ где } \vec{\Pi}_X = \left(\Pi_X, 0, 0\right),\ \vec{\Pi}_Y = \left(0, \Pi_Y, 0\right),\ \vec{\Pi}_Z = \left(0, 0, \Pi_Z\right),$$

то будет справедливым соотношение

$$\oiint_S \left(\vec{\Pi}_Z, d\vec{S}\right) = \iint_{S_Z} \left(\vec{\Pi}_Z, d\vec{S}\right) = \iint_{S_Z} \Pi_Z \, cos\left(\widehat{\vec{\Pi}, d\vec{S}}\right) dS.$$

поэтому в данном случае

$$\oiint_S \left(\vec{\Pi}, d\vec{S}\right) = \oiint_S \left(\vec{\Pi}_Z, d\vec{S}\right).$$

Поэтому изменение импульса площадки вдоль оси Z равно

$$\frac{dP_Z}{dt} = -\frac{1}{v} \oiint_S \left(\vec{\Pi}_Z, d\vec{S}\right).$$

Слева стоит мгновенное изменение импульса площадки вдоль оси Z. Так как система отсчёта инерциальная, то справа, по второму закону Ньютона, должна стоять проекция суммы сил, действующих на площадку со стороны электромагнитной волны, на это же направление Z:

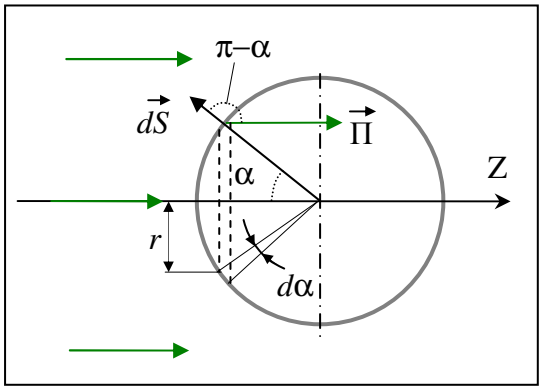
$$F_Z = -\frac{1}{v} \oiint_S \left(\vec{\Pi}_Z, d\vec{S}\right),$$

где v – фазовая скорость волны (в вакууме $v=c$), S – ориентированная (наружу) замкнутая поверхность, внутри которой находится площадка.

Пример. На поверхность шара радиуса R, находящегося в вакууме, падает плоская электромагнитная волна. Длина волны много больше радиуса шара $\lambda \gg R$. Найти силу, действующую на

enlib.ru

шар в случае полного поглощения им волны. Максимальная напряженность электрического поля в волне равна E_0.



Введём ось Z вдоль направления падения волны. Тогда вектор Пойнтинга $\vec{\Pi} = \vec{\Pi}_Z = (0,0,\Pi)$.

Величина $|\vec{\Pi}| = |\vec{E} \times \vec{H}| = EH$.

В вакууме у плоской электромагнитной волны

$H = \dfrac{E}{Z_0}$, где $Z_0 \approx 377$ Ом – волновое сопротивление.

$$|\vec{\Pi}| = \frac{E_0^2}{Z_0} cos^2(\omega t - kz + \varphi).$$

Скорость света в вакууме v=c, поэтому проекция силы на ось Z равна $F_Z = -\dfrac{1}{c}\oiint\limits_S (\vec{\Pi}_Z, d\vec{S})$.

Вводим угловую координату α. Тогда

$$\oiint\limits_S (\vec{\Pi}_Z, d\vec{S}) = \oiint\limits_S \Pi_Z \, cos(\pi - \alpha) dS .$$

Угол α и величина Π_Z одинаковые на участках поверхности *dS*, образующих кольцо радиусом $r = R\,sin\alpha$ и шириной $dl = Rd\alpha$. Площадь этого кольца $dS_K = 2\pi r \cdot dl = 2\pi R\,sin\alpha \cdot Rd\alpha$, поэтому

$$\oiint\limits_S (\vec{\Pi}_Z, d\vec{S}) = \oiint\limits_S \Pi_Z \, cos(\pi - \alpha) dS = \oiint\limits_S \Pi_Z \, cos(\pi - \alpha) dS_K = -\int\limits_0^{\pi/2} \Pi_Z \, cos(\alpha) 2\pi R\,sin\alpha \cdot Rd\alpha .$$

Т.к. λ>>R, то на поверхности шара величину $|\vec{\Pi}| = \dfrac{E_0^2}{Z_0} cos^2(\omega t - kz + \varphi)$ в данный момент времени можно считать постоянной.

$$\oiint\limits_S (\vec{\Pi}_Z, d\vec{S}) = -\int\limits_0^{\pi/2} \Pi_Z 2\pi R^2 \, sin\alpha \cdot d(sin\alpha) = -|\vec{\Pi}| \pi R^2 \, sin^2\alpha \Big|_0^{\pi/2} = -|\vec{\Pi}| \pi R^2 .$$

Поэтому

$$F_Z = -\frac{-|\vec{\Pi}| \pi R^2}{c} = \frac{|\vec{\Pi}| \pi R^2}{c} = \frac{\pi R^2}{c} \frac{E_0^2}{Z_0} cos^2(\omega t - kz + \varphi) . \clubsuit$$

Интенсивность волны - средняя мощность, переносимая волной через единичную площадку, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны.

Интенсивность электромагнитной волны - усреднённое значение модуля вектора Пойнтинга.

$$I = <|\vec{\Pi}|> = \frac{E_0^2}{Z_0} < cos^2(\omega t - kz + \varphi) > = \frac{E_0^2}{2Z_0} .$$

Интенсивность электромагнитной волны пропорциональна квадрату амплитуды напряжённости магнитного поля.

Волна, в которой вектор $\vec{E}$ (и, соответственно, $\vec{H}$) колеблется в одной плоскости, называется *линейно-поляризованной*. В рассмотренном примере вектор $\vec{E} = (E_X, 0, 0)$ совершает колебания в плоскости, образованной осями X и Z. Такая плоскость называется *плоскостью поляризации волны*.

В волне, соответствующей суперпозиции волн для векторов $\vec{E}_1 = (E_X, 0, 0)$, $\vec{E}_2 = (0, E_Y, 0)$, колебания векторов происходят с одинаковой частотой, но в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Конец вектора $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ будет описывать в плоскости (X, Y) фигуру Лиссажу, являющуюся, в зависимости от разности фаз этих колебаний, либо эллипсом, либо отрезком прямой.

Если фигура является эллипсом, то говорят, что волна имеет *эллиптическую* поляризацию, а если – отрезок прямой, то – поляризация линейная.

Интерферируют между собой поперечные волны одинаковой линейной поляризации.

enlib.ru